Le « problème de l'identité » pour une philosophie structuraliste des mathématiques

Brice Halimi

.

Université Paris Ouest (IREPH) & SPHERE

Séminaire *L'(id)entité : : L'(id)entification*, 17 mars 2016

Platon

Les Formes sont toutes également « mêmes qu'elles-mêmes » (*République* VI 511c). Chaque Forme constitue un pôle d'identité. Ce pôle d'identité, que vise la pensée, n'est jamais donné par avance. Les Formes sont à la fois la condition de possibilité et le but de la pensée.

Tout l'objet de la dialectique est de montrer, à propos d'une Forme donnée, avec quelles formes elle est en relation et avec quelles autres elle ne l'est pas (méthode de la division). Les genres de l'Être et de l'Autre sont les deux « grands genres » qui circulent à travers toutes les Formes.

La dialectique est fondée à la fois sur la *reconnaissance* que toute Forme reste même qu'elle-même, et sur le *discernement* des Formes avec lequelles une Forme donnée communique. Ces deux moments sont inséparables.

Les Formes existent par elles-mêmes, dans leur identité, mais l'identité à soi d'une Forme se dégage seulement à travers son articulation à d'autres et sa contrariété avec d'autres.
Toute identification est fondée sur une identité, mais cette identité n'est pas transparente, et toute identification requiert le travail de la pensée.

(Hegel (*Science de la logique*) : identité de l'identité et de l'identification.)

En mathématiques, toute identité est aussi, si l'on veut, le résultat d'une identification, mais c'est l'identité, plutôt que l'identification, qui pose problème.
En mathématiques, on a pour une part toujours déjà identifié.

Exemple : $\{a, b\} = \{a, a, b\}, \{a, b\} = \{b, a\}$.

En revanche, l'identification n'implique pas la connaissance de l'identité de l'objet mathématique.

Deux faces de l’identité en mathématiques

L’identité en mathématiques a deux faces :

1. l’identification de différents *comme différents* : abstraction ;
2. la différenciation d’identiques, c’est-à-dire la différenciation de différents aspects d’une « même » entité *préalablement construite* : localisation.

Ces deux faces sont bien distinctes. En particulier, comme on le verra, les isomorphismes n’y jouent pas le même rôle.

Première face : abstraction

Cette première face correspond à l'identification au sens classique, telle que l'illustrent l'introduction d'une relation d'équivalence puis le passage au quotient.

Il s'agit d'identifier deux choses différentes, bien que différentes. On va de la différence (éléments distincts même si équivalents) vers l'identité. Puis vers la différence (classes d'équivalence disjointes).

Exemple d'une relation d'équivalence $\sim$ sur un ensemble E :

$$x \in E \xrightarrow{\text{équivalence}} [x]_E \xrightarrow{\text{quotient}} E/\sim$$

Différence —> Identité —> Différence .

Seconde face : descente

Cette face correspond à l'opération de recollement.
On construit une entité globale à partir de morceaux distincts, puis on reconsidère ces différents morceaux comme autants d'aspect, comme différentes localisations de cette entité globale.

Le schéma est analogue au précédent :

$$\text{morceaux} \xrightarrow{\text{recollement}} \text{entité globale} \xrightarrow{\text{localisation}} \text{aspects différents}$$

Différence —> Identité —> Différence .

Dans le cas de l'abstraction, on ajoute de la structure pour simplifier.
Les mathématiques apparaissent comme un instrument d'idéalisation modulaire : on se situe à tel ou tel niveau d'analyse de la réalité, peu importe, et à chaque niveau les opérations mathématiques permettent d'élaborer des abstractions relativement au domaine d'« objets » supposé donné.

Toute identité est le résultat d'une identification, ce qui laisse penser qu'il n'existe aucune identité première, aucune forme d'objectivité absolue.

Dans le cas de la localisation, on fait fond sur l'idée de perspective, mais en transformant complètement cette idée.

Structuralisme en mathématiques

1) Une conception structuraliste des mathématiques consiste à mettre en avant la première face d'abstraction : l'opération mathématique par excellence consiste à dégager la structure commune à deux situations différentes. Cette structure constitue elle-même un nouvel objet, à un niveau supérieur.

2) Les véritables objets ne sont pas les constituants d'une structure, mais les structures elles-mêmes (situées à des niveaux d'abstraction différents).

3) L'identification de deux structures (isomorphes) consiste simplement à dégager cet isomorphisme et à introduire la structure dont ces deux structures de départ apparaissent alors comme des variantes.

Le structuralisme *ante rem*

Selon Stewart Shapiro, les mathématiques étudient des structures, conçues comme configurations de purs relata.

Les constituants d'une structure n'ont aucune individualité, puisque chacun d'eux est entièrement caractérisé par le faisceau de relations qu'il entretient avec tous les autres constituants.

Un objet mathématique n'est rien d'autre qu'une place dans une structure. Par exemple, le nombre 2 n'est, ni plus ni moins, que la seconde position dans la structure des nombres entiers (laquelle est donnée de façon première).

Une collection donnée d’objets individuels en relations diverses les uns avec les autres qui exemplifie une certaine structure est ce que Shapiro appelle un système.

Une structure est « la forme abstraite d’un système », un système est l’instance d’une structure.

Toutefois, une structure n’est pas simplement le résultat de son abstraction à partir des différents systèmes qui l’instancient.

En effet, le structuralisme *ante rem*, par opposition au structuralisme *in re*, tient les places d’une structure pour des objets à part entière, et non pour de simples fonctions.

C’est la distinction que fait Shapiro entre la “*places-are-offices* perspective” et la “*places-are-objects* perspective”.

Dans la première perspective, les objets occupent certaines places, mais ces places n’existent pas en dehors de leur actualisation par tels et tels objets. Les objets sont des tenant-lieux, et les places ne sont pas elles-mêmes des objets. Chaque instanciation est une réalisation.

Dans la seconde perspective, les places existent par elles-mêmes. Chaque instanciation est une émanation de la structure. On a affaire à un véritable réalisme.
En particulier, les places-comme-objets d’une structure donnée composent un système qui fait de la structure une instance d’elle-même.

Le « problème de l’identité »

Pour le structuraliste *ante rem*, un objet mathématique, en tant que place dans une structure, ne peut être individué au-delà de ses propriétés structurelles au sein de cette structure.
Cela pose deux problèmes :

- le problème de l’identification trans-structurelle ;
- le problème de l’identité intra-structurelle.

Le premier problème est le problème de savoir comment identifier deux places relevant de deux structures différentes. Par exemple, comment penser que c’est « le même 1 » qui intervient dans la structure $\{0, 1, 2, \ldots\}$ et dans la structure $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$?

Le second problème est le « problème de l’identité » proprement dit, soulevé par Jukka Keränen.

Le problème de l'identité est celui de savoir comment deux objets distincts, appartenant à une même structure, peuvent posséder exactement les mêmes propriétés structurales et cependant être distincts.

Ce problème est posé par n'importe quelle structure munie d'une symétrie, c'est-à-dire d'un automorphisme non trivial.

Exemples : le plan euclidien, les nombres complexes (conjugaison $a + ib \mapsto a - ib$).

Toute structure de ce type abrite deux places distinctes et néanmoins structurellement indiscernables.

Problème de l'identité, suite

Shapiro répond qu'il est toujours possible de différencier deux objets distincts donnés.
Par exemple, le couple $\langle i, -i \rangle$ satisfait la formule $x + y = 0$, ce qui n'est pas le cas de $\langle i, i \rangle$.
Cela suffit à rendre compte de la différence entre i et $-i$.

Mais, pour Keränen, totue théorie d'une certaine espèce d'objets doit fournir un critère d'individuation général, valable pour n'importe quel objet.
Pour Keränen, Shapiro ne propose qu'une condition d'identité [*condition of identity*], alors qu'il faudrait une explication de ce qu'est l'identité [*account of identity*] dans le cadre du langage pertinent.

Dialogue de sourds

Keränen :
"[According to *ante rem* structuralism], whenever two distinct elements in a system have the same intra-systemic relational properties, [...] they occupy the same place of the corresponding structure."

Shapiro : "We know what identity is."

Pour Shapiro, la non-coïncidence de deux places au sein d'une même structure se voit : elle est exhibée par la non-coïncidence des deux items qui occupent ces deux places dans n'importe quel système qui instancie la structure.
La différence de deux constituants symétriques mais différents d'une structure est une donnée irréductible, un « fait brut ».

Exemple tiré par Leitgeb & Ladyman de la théorie des graphes :

Combinatoire

Domaine privilégié pour examiner ces questions de symétries.

Scénario élémentaire :
« Soit a, b et c trois objets, et soit la permutation qui échange a et b en laissant c inchangé. »

L'ensemble composé de a, b et c n'est pas modifié par cette permutation : cette dernière n'est qu'une vue de l'esprit.
On ne peut néanmoins s'empêcher de se représenter a, b et c spatialement, en donnant à a, b et c des positions distinctes.

Ce faisant, on aurait pu donner au départ à a la position qui a été en réalité donnée à b, et inversement.
(Ou encore : on aurait pu appeler a, 'b' —et inversement.)
Cela n'aurait rien changé à notre scénario.

Donc une permutation renvoie à un cadre qui est lui-même défini à une permutation arbitraire près des positions initiales respectives (ou des noms respectifs) de a, b et c.

La représentation d'une permutation demande des choix arbitraires qui la font apparaître comme une forme d'invariant par permutations typographiques.
Pour comprendre la représentation d'une permutation, il faut déjà avoir compris ce qu'est une permutation.

Pas de cercle vicieux, parce que les permutations typographiques (le renommage des objets sur lesquels une permutation agit) ou les permutations spatiales (des positions initiales de ces objets tels qu'on se les figure) n'ont rien à voir avec les permutations visées par le mathématicien.

Pas de cercle vicieux, mais plus compliqué qu'on aurait pu le penser !

Une permutation est une bijection d'un ensemble vers lui-même.

On représente une permutation (pour les ensembles finis) au moyen de lettres schématiques. Exemple :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}.$$

Il est évident qu'on aurait pu choisir d'écrire $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ ou $\{a_1, a_2, a_3\}$ plutôt que $\{a, b, c\}$.

Mais cela ne veut évidemment pas dire qu'on considère l'ensemble $\{a, b, c\}$ à la permutation près "remplaçant" a par α, b par β et c par γ.
En effet, la représentation même de permutations présuppose que les lettres avec lesquelles on travaille ont été fixées une fois pour toutes.

Les lettres a, b et c sont des paramètres variables dans la mesure où elles sont arbitraires, mais non pas, bien sûr, au sens de la variation qu'elles permettent de représenter.

Indexation standard

Le groupe des permutations sur un ensemble X à n éléments, noté $\mathfrak{S}_X$, est généralement défini comme le groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

En réalité, $\mathfrak{S}_X$ est seulement isomorphe à $\mathfrak{S}_n$, et l'isomorphisme n'est pas canonique. Choisir un isomorphisme revient précisément à choisir une indexation de X.

Dans le cas où $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, une indexation est naturelle : l'indexation triviale qui prend chaque nombre comme son propre indice : $1 = 1, 2 = 2, \dots, n = n$.

Dans la représentation standard des choses, les indices sont les numéros correspondant aux nombres. Les nombres sont leurs propres numéros.

Mais que se passe-t-il, dès lors, si les nombres sont confondus avec des numéros ?

Cette confusion revient à comprendre les chiffres 1, 2, 3, ... comme des indices de rangs (chiffres), plutôt que comme des objets individuels (nombres).

Soit π la permutation suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ici 1, 2, 3 et 4 ne désignent pas des rangs, mais des objets, comme le montre l'itération de π :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \quad .$$

Interprétation non-standard de l'itération de π

Imaginons que l'on comprenne $1, 2, 3, 4$ comme des rangs plutôt que comme des objets, et que l'on comprenne chaque nouvelle ligne apparaissant dans l'itération de π comme une réindexation des rangs :

$$\begin{array}{lcccccc} L_1 & = & 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4 & = & 1.1\ \ 2.1\ \ 3.1\ \ 4.1 \\ L_2 & = & 4\ \ 3\ \ 1\ \ 2 & = & 1.2\ \ 2.2\ \ 3.2\ \ 4.2 \end{array} .$$

4 devient, pour ainsi dire, « le nouveau 1 », c'est-à-dire la nouvelle position n°1.
De même, 3 devient « le nouveau 2 », et ainsi de suite.

Dans cette perspective, 1 est un rang —l'index de la première position sur la ligne courante—, et chaque application la permutation π correspond à une perturbation des rangs à partir de l'indexation de départ.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Selon l'interprétation non-standard, la troisième ligne L_3 (première itération de π) est :

> « 4 *devient* 2*, mais comme* 2 *est à présent* 3 *(puisque* $2.2 = 3$*),* 4 *est finalement envoyé sur* 3*. Donc* 3 *est le premier chiffre à écrire sur* L_3*.* »

Le principe de base qui guide l'interprétation non-standard est que 4 sur L_1 devient 2 sur L_2, mais 2 entendu au sens du nouveau code mis en place par L_2, c'est-à-dire $2.2 = 3$. De même, 3 devient 1, mais au sens de $1.2 = 4$.

On aboutit finalement à :

$$L_3 \quad = \quad 3 \;\; 4 \;\; 2 \;\; 1 \quad = \quad 1.3 \;\; 2.3 \;\; 3.3 \;\; 4.3$$

Bilan

L'itération correcte de π est :

$$\begin{array}{lcccc} L_1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ L_2 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ L_3 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array},$$

Selon l'interprétation non-standard, l'itération de π devient :

$$\begin{array}{lcccc} L_1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ L_2 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ L_3 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{array}.$$

L'interprétation non-standard revient à interpréter les nombres sur lesquels agit une permutation comme des rangs flottants, sont la valeur est réactualisée à chaque nouvelle étape.

Incompréhensions compréhensibles en mathématiques

L'interprétation non-standard est évidemment complètement fausse.

Elle est fondée sur une confusion des nombres-comme-objets (au sens où 4 est envoyé sur 2) avec des nombres-comme-rangs-contextuels —indications d'un rang dans le contexte d'une certaine ligne (au sens où 3 devient « le nouveau 2 » dans le contexte de L_2).

Cette interprétation non-standard, bien que fausse, n'est pas pour autant incohérente, du moins incompréhensible.

Certaines incompréhensions en mathématiques sont compréhensibles.

Ces incompréhensions concernent souvent la façon dont les indexations, les différents repérages fonctionnent en mathématiques, ainsi que l'identité des objets repérés par delà la variété de leurs repérages possibles.

Les permutations sur un ensemble sont autant de symétries de cet ensembles, mais présupposent, pour leur représentation, l'introduction d'un repérage de référence par rapport auquel elles peuvent justement apparaître comme des symétries.

Ce repérage prend la forme d'une indexation plus ou moins arbitraire qui permet de rigidifier une certaine situation, et ainsi de représenter des symétries sans être pris de vertige.

De façon générale, les indices, numérotations, paramétrages et éléments distingués jouent un rôle essentiel en mathématiques : ce sont autant de moyens locaux de « fixer les idées ». Employons le terme général de REPÉRAGE pour désigner ces notations.

Un repérage est ce qui présente une structure mathématique sous un certain angle et tue ainsi toute symétrie parasite. C'est l'introduction de coordonnées qui rigidifie une configuration mathématique et la rend ainsi mathématiquement manipulable.

Exemples de repérages

- l'écriture d'une permutation sous la forme d'une table à deux lignes ;
- le choix d'une origine pour l'espace affine, qui conduit à l'espace vectoriel sous-jacent ;
- le choix arbitraire d'un point-base pour la définition du groupe fondamental d'un espace topologique connexe par arcs ;
- le choix d'un atlas particulier pour une variété différentiable ;
- l'expansion d'une structure (au sens de la théorie des modèles), qui est en fait l'internalisation dans le langage-objet d'un repérage dans le méta-langage.
- le recouvrement d'un groupe à partir de l'un de ses torseurs.

Les repérages correspondent à tous les usages mathématiques de choix arbitraires notationnellement explicites et contrôlés.

Torseurs

Étant donné un groupe G, un *G-torseur* est un ensemble X sur lequel G agit librement et transitivement : X est une copie de G dans laquelle l'élément neutre de G n'est plus distingué.

Par exemple, l'espace affine $\mathbb{A}^n$ est un torseur pour l'espace vectoriel correspondant, c'est-à-dire pour le groupe des translations dans $\mathbb{R}^n$.
L'ensemble des repères orthonormés est un torseur pour le groupe des rotations $O(n)$.

Un groupe G est canoniquement isomorphe à l'un quelconque de ses torseurs $\mathcal{T}_G$,mais seulement une fois qu'un élément de $\mathcal{T}_G$ a été distingué pour jouer le rôle de l'élément neutre.
Tant que ce choix n'a pas été fait, $\mathcal{T}_G$ est seulement virtuellement isomorphe à G.

John Baez :

> *Here's a famous example : the set of orthonormal frames at some point of a n-dimensional Riemannian manifold is not the group $O(n)$, but it's an $O(n)$-torsor. You can take any frame and rotate it by an element of $O(n)$; you can take two frames and work out their "difference", which is an element of $O(n)$ – but the frames don't form a group. We can pretend the frames are the group $O(n)$ – but only after we arbitrarily choose one frame and decree it to be the identity. Then every other frame is a rotated version of this one, so we can pretend it is a rotation !*

Va-et-vient : les repères orthonormés deviennent des rotations (avec une structure de groupe), les rotations sont ressaisies à partir des repères (comme les vecteurs le sont à partir des points du plan affine).

Tout repérage implique des choix arbitraires, et en ce sens est variable puisqu'il aurait pu avoir été choisi différemment.

Mais cette variabilité reste purement virtuelle : une fois fixé, un repréage ne peut justement pas changer. Sinon les pires confusions s'ensuivent (comme on vient de le voir).

L'interprétation non-standard revient justement à confondre la variabilité virtuelle des paramètres d'un repérage avec la variabilité actuelle des objets présentés dans le cadre de ce repérage.

Thèse puis retour à l'identité

Thèse : la plupart des structures mathématiques ne sont accessibles (à la fois descriptibles et analysables) qu'à travers la médiation d'un repérage, exactement comme un espace vectoriel est généralement conçu à partir de l'espace affine dont il est (rétrospectivement) l'espace vectoriel sous-jacent.

Autre exemple : le groupe $\mathfrak{S}_3$ n'est accessible qu'à travers le repérage consistant en un ensemble $X = \{a, b, c\}$ muni d'une indexation $j : \{1, 2, 3\} \to X$ de ses éléments. (Le cas $X = \{1, 2, 3\}$, $j = \mathrm{id}$ n'est qu'un cas limite.)

Les repérages ne sont pas de simples outils auxiliaires, ni de simples appareillages psychologiques, mais des constituants essentiels de l'objectivité mathématique aussi bien que de la connaissance mathématique.
Ce sont les schèmes de l'entendement mathématique.

Retour au « problème de l'identité »

Un repérage n'est ni une structure « telle quelle », ni un simple système instanciant cette structure. Et il est fondamental de reconnaître ces trois niveaux (structures, repérages, systèmes) dans leur irréductibilité les uns aux autres.

Un repérage n'est pas une structure : ses paramètres sont arbitraires ; ils sont un moyen, non la fin de l'analyse.

Un repérage n'est pas non plus un système : si deux repérages d'une même structure étaient des systèmes, ils seraient indiscernables ; tout ce qui est déductible d'un repérage vaut de la structure (ce n'est pas vrai d'un système).

La controverse Keränen *vs* Shapiro

- Shapiro confond un repérage avec la structure que présente ce repérage.
  Lors de sa discussion avec Keränen, Shapiro envisage par exemple d'adjoindre un ordre linéaire à une structure, de façon à en individualiser les différentes places, et il décrit une telle adjonction comme un « enrichissement » de la structure. Mais la structure enrichie est la même que la structure de départ (sinon, on cesserait de parler de la même chose) : Shapiro suggère en fait que le repérage est interne à la structure repérée.

- Au contraire, Keränen confond un repérage avec un système.
  Pour lui, adjoindre un repérage, c'est cesser de viser la structure elle-même, et tomber dans une instanciation particulière.

Solution du « problème de l'identité »

L'erreur commune à Shapiro et Keränen est de ne pas distinguer entre structures, systèmes et repérages.

(Cela étant, ces distinctions sont relatives : une structure peut elle-même apparaître comme un repérage relativement à quelque autre structure plus abstraite.)

Solution : tout automorphisme non trivial d'une structure donnée est en fait un isomorphisme entre deux repérages de cette structure (par exemple $\langle \mathbb{C}, i, -i \rangle$ et $\langle \mathbb{C}, -i, i \rangle$), et peut être introduit seulement comme tel.

Il existe bien des symétries, mais leur introduction présuppose justement la distinction des termes qu'elles rendent indiscernables.

Cette solution élémentaire demande simplement d'admettre qu'une structure n'existe pas hors d'un repérage (sans pour autant cesser d'être une structure indépendante).

Question naturelle : qu'est-ce qu'un isomorphisme *entre repérages* ?

Réponse : un isomorphisme spécifié, un isomorphisme concret, un isomorphisme au sens ordinaire.

Si on ne suit pas cette voie, alors tout isomorphisme entre deux structures montre que ces deux structures sont en réalité identiques, de sorte qu'elles ne peuvent pas être dites seulement isomorphes !
(= Variante du « problème de l'identité ».)

Ce que c'est que ne pas comprendre en mathématiques.

Les repérages comme schèmes de l'entendement mathématique : les conditions épistémiques de manipulabilité des objets mathématiques devraient être intégrées à l'objectivité mathématique elle-même.

La confusion épistémique (non pas philosophique) entre repérages et systèmes, ou bien entre repérages et structures, le montre *a contrario*.

La confusion épistémique entre repérages et systèmes recouvre une famille de mécompréhensions, consistant à croire

- que les mathématiques parlent directement de la réalité (systèmes = repérages) ;
- ou bien au contraire que les objets authentiques des mathématiques sont des structures abstraites qu'on devrait pouvoir appréhender sans aucune médiation symbolique (repérages = simples systèmes).

La confusion épistémique entre repérages et structures a deux illustrations :

- l'interprétation non standard d'une permutation revient à confondre les paramètres d'un repérage avec les objets présentés par ce repérage.
- la confusion de deux permutations conjuguées :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

  Ce que la première permutation fait avec *b*, la seconde le fait avec *c*, et vice versa.
  « Après tout, l'objet *b* aurait pu être appelé '*c*', et *vice versa*, donc les deux permutations sont en fait identiques. »

  Les deux permutations sont bien symétriques en vertu de l'automorphisme $f_\tau : \sigma \mapsto \tau\sigma\tau^{-1}$ de $\mathfrak{S}_3$ (τ étant l'échange de *b* et de *c*), mais cette symétrie ne rend nullement admissible la méta-permutation des paramètres du repérage. Les paramètres de la permutation n'ont rien à voir avec des objets permutables.

De même : on décide de nommer 'i' une racine distinguée de -1, et on découvre ensuite la symétrie existant entre i et $-i$. On aurait certes pu appeler '$-i$' (plutôt que 'i') la racine distinguée de -1, mais cette méta-symétrie concernant le paramétrage n'a bien sûr rien à voir avec la symétrie de $\mathbb{C}$.

Comprendre un repérage, en bien user, c'est viser une structure à travers des notations dans un environnement tel qu'on sait (qu'on voit) qu'un changement cohérent de notations « ne changerait rien ».

Une structure est la forme abstraite de toutes ses instances possibles, tandis qu'elle est l'invariant de tous ses repérages possibles.

Conclusion à propos de la première face (« abstraction »)

Deux figures distinctes de l’identification structurelle en mathématiques :

- le passage à une structure (classe d’isomorphisme) ;
- la visée de la structure à partir de l’un de ses repérages.

Le problème de l’identité provient de la confusion de ces deux figures.

Passage à la seconde face (« descente »)

Idée fondamentale en géométrie que la différence est une différence de localisations ou de points de vue.

Cette version des choses est très liée à la géométrie algébrique, là où l'abstraction et le structuralisme sont très liés à l'algèbre et la théorie des ensembles.

Carlos Simpson, « Descent » (pp. 83 et 86) :

> *The notion of descent, piecing together a global picture out of local pieces and glueing data, permeates Grothendieck's work. The history of this idea dates back to the middle ages with mapmakers drawing an ever more precise picture of the world, as modern terminology of "atlases" and "charts" reminds us.|*
> *[. . .] Modern geometry springs from the observation that different map views have to be "glued together" on the overlapping territory, to obtain a global picture. The sphere S^2 is the first real-life manifold which was explicitly covered by charts.*

Paradigme d'un planisphère. Deux cartes doivent être bi-unioquement traductibles l'une en l'autre sur toute leur zone de chevauchement.

C'est vrai pour une variété en général : soient

- U_i et U_j deux ouverts d'une variété M,
- $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ une carte sur U_i,
- $\varphi_j : U_j \to \mathbb{R}^n$ une carte sur U_j,

alors $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est supposé être un homéomorphisme (et même un difféomorphisme).

Projections stéréographiques sur $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$: U_N, U_S, plan $x_0 = 0$, $\varphi_N(x) = (x_1, \ldots, x_n)/(1 - x_0)$, $\varphi_S(x) = (x_1, \ldots, x_n)/(1 + x_0)$, $\varphi_S \circ \varphi_N$ est le difféomorphisme de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans lui-même donné par $y \mapsto y/||y||^2$.

Les isomorphismes ne jouent pas le même rôle que pour l'abstraction.

1. Dans le cas de l'abstraction, un isomorphisme vaut identité.
2. Dans le cas de la descente, un isomorphisme indique une condition de cohérence.

Corrélativement, le concept de structure n'est pas le même.

1. Dans le premier cas, la structure est le quotient par anticipation,
2. tandis que dans le second la structure correspond aux contraintes qui s'exercent sur le recollement ou la construction de sections.

Théorie de la descente

La théorie de la descente est l’étude de données locales et de la procédure de recollement par laquelle ces données locales peuvent renvoyer à une entité globale que l’on cherche à représenter.
Le terme de « descente » s’explique par le fait que les données locales sont conçues comme situées « au-dessus » du niveau qui sert de base pour l’entité à représenter.

La théorie de la descente est fondée sur le cadre des « catégories fibrées » (Grothendieck).

Catégorie fibrée

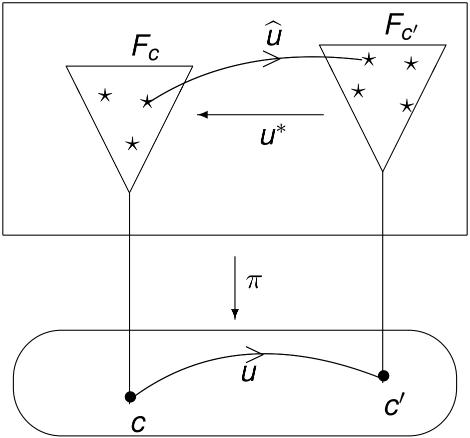
Une catégorie fibrée est un foncteur $\pi : F \to C$ tel que, pour toute flèche $u : c \to c'$ dans c et tout objet x' au-dessus de c' ($c' = \pi(x')$), il existe une flèche $\widehat{u} : x \to x'$ dans F au-dessus de u ($\pi(\widehat{u}) = u$), universelle parmi toutes les flèches au-dessus de u.

La catégorie C s'appelle « la catégorie base », F « l'espace total » et, pour tout objet c de C, la catégorie $F_c := \pi^{-1}(c)$ est une sous-catégorie de F appelée « fibre au-dessus de c ».

Le concept de catégorie fibrée généralise la notion de surjection, avec un ingrédient supplémentaire : la base C possède une certaine structure (exprimée par ses flèches) et l'existence d'une catégorie fibrée implique une corrélation (marquée par la correspondance $u \mapsto \widehat{u}$) entre les relations existant entre deux objets de la base et les relations existant entre les deu fibres correspondantes dans l'espace total.

Une catégorie fibrée peut aussi être définie comme l'attribution à tout objet c de C d'une catégorie F_c, de telle manière que toute flèche $u : c \to c'$ dans C induise un foncteur $u^* : F_{c'} \to F_c$.

Dessin d'une catégorie fibrée :



F = espace total

π = catégorie fibrée

C = base

Exemple classique de descente

Soient $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'un espace topologique U et, pour tout $i \in I$, une fonction continue $f_i : U_i \to V$, de telle sorte que

$$\forall i, j \in I \;\; f_i|U_{ij} = f_j|U_{ij},$$

où $U_{ij} := U_i \cap U_j$.
Alors il existe une unique fonction $f : U \to V$ telle que $\forall i \in I \;\; f|U_i = f_i$.

Ce résultat peut être reformulé dans le contexte de la catégorie fibrée dom : $Cont \to Top$.
Pour $U' := \coprod_{i\in I} U_i$, la famille $(f_i)_{i\in I}$ constitue un objet de $Cont_{U'}$ et il existe une flèche canonique $u : U' \to U$.

On peut formaliser les choses au moyen du « pullback » suivant :

$$
\begin{tikzcd}
U' \times_U U' \arrow[r, dashed, "p_2"] \arrow[d, dashed, "p_1"'] & U' \arrow[d, "u"] \\
U' \arrow[r, "u"'] & U
\end{tikzcd}
$$

- $U' \times_U U'$ représente $\coprod_{i,j \in I} U_{ij}$.
- Pour $x \in U' \times_U U'$, disons $x \in U_{ij}$, $p_1(x)$ est x en tant qu'élément de U_i et $p_2(x)$ est x en tant qu'élément de U_j.
- Pour $(f_i)_{i \in I} \in Cont_{U'}$, $p_1^*((f_i)_i) = (f_i|U_{ij})_{i,j}$ et $p_2^*((f_i)_i) = (f_j|U_{ij})_{i,j}$.

L'hypothèse $\forall i, j \in I \;\; \phi_{ij} : f_i|U_{ij} = f_j|U_{ij}$ peut alors se formuler :

$$p_1^*((f_i)_i) = p_2^*((f_i)_i) \;\text{ dans } Cont_{U' \times_U U'} \quad .$$

Plus généralement, en remplaçant l'identité par un isomorphisme « de recollement », on suppose qu'on a

$$\phi : p_1^*((f_i)_i) \simeq p_2^*((f_i)_i) \text{ dans } Cont_{U' \times U'} \quad ,$$

c'est-à-dire une famille

$$\phi_{ij} : p_1^*(f_i) \simeq p_2^*(f_i)$$

d'isomorphismes dans les différentes fibres au-dessus des U_{ij} —ces isomorphismes étant compatibles sur leurs zones de chevauchement : $\phi_{ik} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}$.

Dans ces conditions, il devient possible de recoller les données locales au-dessus des différents U_i, pour donner naissance à un objet global au-dessus de U, à savoir une fonction $f : U \to V$ telle que $\forall i \in I \ \ f|U_i \simeq f_i$.

Étant donnés une categorie fibrée $p : F \to C$, une flèche $u : U' \to U$ dans C et $\xi' \in F_{U'}$, une donnée de recollement sur $\xi' \in F_{U'}$ est un isomorphisme

$$\phi : p_1^*(\xi') \simeq p_2^*(\xi') \text{ dans } F_{U' \times_U U'}$$

vérifiant $p_{31}^*(\phi) = p_{32}^*(\phi) \circ p_{21}^*(\phi)$ (les isomorphismes sont compatibles entre eux).

Intuitivement, pour $u : \coprod_{i \in I} U_i \to U$:
ξ' représente une collection d'objets, un objet au-dessus de chaque composante U_i du recouvrement de U, et l'isomorphisme ϕ atteste que tous ces objets concordent sur les zones de chevauchement.
LA QUESTION est alors : peut-on identifier ξ' à la collection des différentes restrictions d'un MÊME objet au-dessus de U ?
SI OUI, la flèche u est appelée un « morphisme de descente strict ». Cela signifie que tout ce qui est virtuellement recollable selon u l'est effectivement, sous la forme d'un objet global. Un objet au-dessus de U' muni d'une donnée de recollement équivaut exactement à un objet au-dessus de U.

Etant donnés un espace topologique U, un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de U et une catégorie fibrée $U_i \mapsto \mathcal{C}(U_i)$, deux conditions de recollement sont naturelles :

1. Condition sur les objets : Pour des objets $\xi_i \in \mathcal{C}(U_i)$ et des isomorphismes de recollement $\varphi_{ij} : \xi_i|_{U_{ij}} \simeq \xi_j|_{U_{ij}}$ vérifiant $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$ au-dessus de U_{ijk}, alors il existe un objet global $\xi \in \mathcal{C}(U)$ et des isomorphismes $\varphi_i : \xi|_{U_i} \simeq \xi_i$ tels que les données de descente induites par $\langle \xi, (\varphi_i)_{i\in I} \rangle$ soient « les mêmes » que celles de départ.
2. Condition analogue sur les flèches : Pour deux objets globaux $\xi, \xi' \in \mathcal{C}(U)$ et une collection de flèches locales $f_i : \xi|_{U_i} \to \xi'_{|U_i}$ ($i \in I$) telle que f_i et f_j induisent les mêmes flèches au-dessus de U_{ij}, il existe une flèche globale $f : \xi \to \xi'$ telle que $f|_{U_i} = f_i$.
   De plus, étant donnés deux flèches globales f et f', si $f|_{U_i} = f'|_{U_i}$ pour tout $i \in I$, alors $f = f'$.
   (Ces conditions sur les flèches reviennent à dire que $U_i \mapsto \mathcal{C}(U_i)(\xi|_{U_i}, \xi'|_{U_i})$ est un faisceau.)

Si ces conditions sont vérifiées, alors la catégorie fibrée $U_i \mapsto \mathcal{C}(U_i)$ est appelée un champ. (Voir Carlos Simpson, « Descent », pp. 86-87.)

Exemples :

- $\mathcal{C}(U_i) = \mathrm{Cont}_{U_i}$
- $\mathcal{C}(U_i)$ = la catégorie des fibrés vectoriels sur U_i
- $\mathcal{C}(U_i)$ = la catégorie des faisceaux sur U_i.

Simpson (p. 96) :

> *The different pieces making up a space don't have to share a common existence in a single place. The glueing data, abstracted into the categorical structure of the topos of sheaves, provide the links which form a virtual reality from which the geometric object emerges. The original "ground level" fades from view, replaced by the abstract collection of glueing data itself as the only true reality.*

Simpson, suite (pp. 96-97) :

[. . .] Heretofore, a given point on the ground level is represented by many different points on the chart level. So, wherever you are, there might be some viewpoints which are better adapted than others, but there is no single unique best viewpoint, and the various different views work together to generate a picture of the whole. | [. . .]
When we think of the complicated "ground level" as being a reality that is best apprehended (and might only really exist) through a covering representing a wide variety of different approaches and viewpoints, the place where things are really happening, and what we should concentrate on understanding, is the glueing data which explain how to pass between the various different points of view and how they are bound together.

Idée que les données locales sont naturellement descriptibles en termes de « points de vue « ou « perspectives » sur une MÊME entité globale qui n'est pas elle-même accessible hors de sa reconstruction par recollement de ces différentes perspectives.

La théorie des champs est la théorie abstraite de la reconstitution d'un objet comme géométral d'un système cohérent de perspectives.

Conclusion

1. Nécessité de bien distinguer entre (au moins) deux modes d'identification en mathématiques.
2. Nécessité de bien distinguer entre structures, repérages et systèmes.
3. Le « problème de l'identité » provient d'une confusion entre l'identité d'une structure commune à tous ses repérages et l'identité d'une structure commune à toutes ses instances.
4. La théorie de la descente fait de l'identification, non pas une abstraction, mais une construction.
5. Deux erreurs symétriques à propos des phénomènes d'unification en mathématiques : réduire une globalisation à une abstraction (structuralisme), réduire une abstraction à une globalisation (théorie des modèles ?).