Logique et domaines d'objets mathématiques

Brice Halimi

QUATRIÈME ÉCOLE THÉMATIQUE, 30 juin 2016

Plan

1. L'universalisme logique
2. Le problème de la généralité absolue
3. La théorie des ensembles ZFC
4. Question ouverte des domaines d'objets

Hypothèse de travail

La logique est un vecteur fondamental des échanges entre philosophie et mathématiques, notamment parce qu'il revient à la logique de penser le statut de l'objectivité mathématique au regard de la sphère des objets de pensée en général.

Cet enjeu concerne, non pas la nature des objets mathématiques, mais celle du domaine des objets mathématiques, ou celle des différents domaines d'objets mathématiques.

L’universalisme logique

Réponse classique : l’option universaliste (Frege, Russell).

Elle consiste à fondre le domaine des objets mathématiques dans le domaine de tous les objets de pensée en général.

Ontologie = theorie de tout ce qui est (ou des différentes espèces de choses qui composent tout ce qui est).

Logique = théorie qui porte sur ce qui rend possible de parler de tout ce qui est.

Kant, *Logique*

[. . .] si nous mettons de côté toute connaissance que nous devons emprunter aux seuls objets et si nous réfléchissons seulement à l'usage de l'entendement en général, nous découvrons ces règles qui sont absolument nécessaires à tous égards et sans considération des objets particuliers de la pensée [par opposition aux règles qui concernent un domaine spécial de connaissance], puisque sans elles nous ne pourrions pas penser du tout.

Frege

Pour Frege, et contrairement à Kant, la logique régit tout objet de pensée possible avant de régir toute pensée possible :

> *Peut-on, sans engendrer une confusion totale, nier l'une d'entre elles [l'une des propositions fondamentales de la science des nombres] ? Serait-il encore possible de penser ? [...] Les lois arithmétiques gouvernent le domaine du nombrable. C'est le plus vaste. Il inclut non seulement le réel, non seulement l'intuitif, mais tout le pensable. Ne faut-il pas de même que les lois des nombres aient un lien très intime avec celles de la pensée ?*
> *(Fondements de l'arithmétique, §14)*

Logique formelle et logique transcendantale

La logique transcendantale est en un sens moins générale que la logique formelle, mais cela ne veut pas dire que le domaine de la logique transcendantale forme un sous-domaine de la logique formelle.
Aucun domaine ne peut englober le domaine maximal que constitue la totalité de l'expérience possible.
Pour Kant, la logique formelle ne dispose pas d'un « domaine » à proprement parler.

Kant rend compte de la généralité supérieure de la logique formelle en insistant sur le fait que celle-ci régit le fait même de penser, indépendamment des objets de pensée.

Universalité de la logique et des mathématiques

Contrairement à Kant, Frege conçoit la logique comme une science (objectuellement) universelle.
Pour Frege comme pour Russell, la logique est à la fois la théorie absolument générale et comme la théorie de la généralité absolue, et c'est ce qui rend compte de son statut de science première.

L'universalité de la logique garantit celle des mathématiques.

Pour Frege l'arithmétique est universelle en ce sens que les nombres, en tant qu'extensions de concept, renvoient à tous les concepts en général, et par là à n'importe quel objet en général (à tout ce qui peut faire partie de l'extension d'une concept, quel qu'il soit).

Critique de l’universalisme logique

L’universalisme logique a été critiqué par une tradition d’interprètes (Tarski, Heijenoort, Hintikka, Ricketts) qui ont fait valoir que, dans la perspective universaliste, on ne peut considérer le langage de la logique que de l’intérieur et que toute considération proprement méta-théorique (sémantique) devient impossible.

Hintikka sur l'« ineffabilité de la sémantique »

One of the main consequences of the universality of language (universality of the language) is that I cannot in my language speak of how its semantical relations to the world could be changed, at least not in a large scale. But such a systematic variation of the interpretation of a language is what the model theory for this language is all about. To speak of different models of a theory or a language in a logician's sense is ipso facto to speak of different systems of referential relations (interpretations) connecting language (or a part thereof) with the world. Hence all model theory is impossible according to the strict constructionist version of the universalist assumption.

(Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator, 1997)

L’erreur de Hintikka

Hintikka confond l’universalité de la logique (= le fait que la quantification, dans son usage logique, réfère à tous les objets en général) et le fait que le langage de la logique serait un « medium universel » dans lequel on peut et doit tout dire.

De nombreux commentateurs (Jamie Tappenden, Richard Heck, Gregory Landini, . . .) ont montré qu’il n’y avait aucune objection de principe, chez Frege comme chez Russell, contre des considérations méta-théoriques.

Origine de la confusion

C'est l'Essai de Tarski, « Le concept de vérité dans les langages formalisés » (1933-35).

Tarski montre qu'une définition cohérente du prédicat de vérité (Tel ou tel énoncé « est vrai ») pour les énoncés d'un certain langage L ne peut être donnée que dans un métalangage ML dont l'ordre doit être strictement supérieur à celui du langage L de départ.

L'ordre d'un langage est défini comme l'ordre maximal de ses catégories sémantiques (individus, prédicats d'individus, prédicats de prédicats d'individus, etc.).
Cela exclut de définir le prédicat de vérité pour le langage ordinaire, qui est d'ordre infini (« universel »).

Comme Philippe de Rouilhan l'a montré, Tarski, dans le Post-Scriptum (1935) de son Essai, a redéfini la notion d'ordre : l'ordre d'un langage est défini par l'ordre maximal de ses variables, et l'ordre d'une variable est lui-même défini comme le rang de ses valeurs possibles dans la hiérarchie cumulative ensembliste.

À la suite de cette redéfinition, les classes auxquelles font référence les variables du langage-objet L doivent toutes être des éléments de classes auxquelles font référence les variables du métalangage ML. Le domaine d'interprétation de ML doit donc être plus vaste que celui de L.

Un langage universel (= un langage dont les variables portent sur toutes choses) ne peut donc se prêter à aucune théorie de la vérité.

Cette conclusion procède d'un artefact de l'analyse de Tarski.

Note sur la sémantique de Tarski

La sémantique de Tarski interprète toute quantification universelle « pour tout x ... » comme restreinte au domaine D d'une certaine structure ensembliste (appelée « univers de discours » ou « interprétation du langage »).

« Pour tout x ... » signifie à chaque fois :

Pour tout membre de D, ...

(D étant un certain domaine particulier variable).

Pour résumer

- L’universaliste logique : « La logique est complètement universelle. »
- Le particulariste logique : « Non, l’universalité logique est une illusion, il n’existe que des univers de discours restreints. L’universalisme logique est erroné, car il fait du langage une prison. »
- L’universaliste logique : « Non, l’universalité de la logique n’a rien à voir avec l’“universalité” (au sens de Tarski) du langage ordinaire. »
- Le particulariste logique : « Malgré tout, l’universalisme logique tombe sous le coup du paradoxe de Russell. »

Avantages de l'universalisme

Suivant l'option universaliste, la logique confère aux mathématiques un domaine d'objets unique qui est consubstantiel au domaine de tous les objets en général, ce qui garantit les trois choses suivantes :

- objectivité (référentielle) ; contre le formalisme
- universalité (généralité maximale) ; contre Kant
- unité (unicité) du domaine ; contre Aristote.

Mais l'option universaliste précipite le problème de la « généralité absolue » : peut-on sans contradiction poser un domaine d'absolument tous les objets ?

La genéralité absolue est le propre de tout discours qui prétend porter sur toutes choses en général (*absolutely everything*).

Si le domaine d'absolument toutes choses existait, alors le domaine de tous les ensembles aussi, ce qu'interdisent certains paradoxes logiques, à commencer par le paradoxe de Russell.

Si $V = \{x : x = x\}$ existe, alors $W = \{x : x \notin x\}$ aussi.
Mais, par définition de W, on a :

$$W \in W \text{ ssi } X \notin W.$$

Version « moderne »

L'histoire est couramment racontée ainsi :

- La logique est la logique du premier ordre.
- L'interprétation de la logique du premier ordre prend place dans l'univers de la théorie des ensembles ZFC (sémantique à la Tarski).
- La théorie des ensembles est inconsistante si l'on suppose l'existence d'un ensemble universel.
- Donc il n'y a pas moyen de faire référence à absolument toutes choses.

Le problème de la généralité absolue

Débat majeur en philosophie analytique. Parler de toute choses en général (indépendamment des mathématiques) ne va pas de soi.
Cette question convoque philosophie et mathématiques.

Pendant longtemps, la généralité absolue a été considérée comme condamnée par le paradoxe de Russell.

Le débat a été progressivement ré-ouvert depuis les années 1990, pour deux raisons :

1. Techniquement, le paradoxe de Russell ne réfute pas en tant que tel l'idée d'universalité absolue : critique technique de ZFC.
2. Le particularisme de la généralité (« Toute généralité est restreinte ») n'est pas philosophiquement satisfaisant : critique philosophique de ZFC.

Critique technique de ZFC : le paradoxe de Russell par Russell

Principles of mathematics (1903), §§103-104 & App. B.

Conclusion tirée par Russell : les classes qui en tant que unes sont membres d'elles-mêmes en tant que plusieurs, ne forment pas une classe en tant que une.

D'où la question générale (*Principles*, §102) :
Quelles sont les fonctions propositionnelles à l'extension desquelles correspond une classe en tant que une ?

(Ce n'est pas le cas de la fonction propositionnelle $\widehat{x} \notin \widehat{x}$.)

La distinction de types logiques

> *A class as one, we shall say, is an object of the same type as its terms ; i.e. any propositional function $\phi(x)$ which is significant when one of the terms is substituted for x is also significant when the class as one is substituted. But the class as one does not always exist, and the class as many is of a different type from the terms of the class, even when the class has only one term [. . .]. It is the distinction of logical types that is the key to the whole mystery.*
> *(§104)*

Autrement dit, $x \notin x$ signifie : x-en-tant-que-une n'est pas l'un des membres de x-en-tant-que-plusieurs.

Mais x-en-tant-que-une et x-en-tant-que-plusieurs sont de deux types différents, et ne peuvent donc correspondre à un même symbole.

La théorie des types logiques

L'Appendice B des *Principles* formalise les types d'une façon plus stricte.

Un *type* est le « domaine de signification » ["range of significance"] d'une certaine fonction propositionnelle.
Les types forment une *simple hierarchy* :

- type des individus of the individuals
- type des classes d'individus
- type des the classes of classes d'individus
- ...
- type des relations
- type des classes de relations
- type des relations de relations
- ...
- ...

Théorie Simple des Types

Seule une expression du type

$$x^{(n)} \in y^{(n+1)}$$

est bien formée.

Conséquence : '$x \in x$' est dénué de signification (pour des raisons syntaxiques), et du coup '$x \notin x$' aussi.

Appendice B (§§497-498)

- Les nombres échappent aux distinctions de type.
- Donc (!) tous les domaines de signification aussi, car tout domaine de signification tombe sous la fonction propositionnelle « être nombré par un nombre ».
- Autrement dit, tous les domaines de signification forment eux-mêmes un domaine de signification.
  Comme le dit Russell : « Puisque tous les parcours ont des nombres, les parcours sont un parcours. »
- « Par conséquent $x \in x$ est parfois doué de signification. »
- Par ailleurs, tous les objets forment un type unique, qui correspond à la fonction propositionnelle $\widehat{x} = \widehat{x}$, dont l'extension est une classe universelle.

La théorie des types de Russell n'est pas un renoncement à l'universalité de la logique.

ZFC

Schéma de séparation : Pour toute formule $\varphi(z)$ et tout ensemble x, il existe un ensemble y tel que $\forall z\ (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z)))$.

Raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe un ensemble universel V. Alors, par le schéma de séparation, il existe $V' = \{x \in V : x \notin x\}$. Mais V' n'est rien d'autre que la classe W paradoxale de Russell. Donc il n'existe pas d'ensemble universel.

Réponse de Russell ("On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types", 1905) : c'est l'axiome de séparation qui doit être abandonné, et non l'existence d'une classe universelle.

Théorème de Cantor

$$\forall u \, \forall y \, (y \subseteq u \to y < \wp(u))$$

Ce théorème prouve apparemment l'impossibilité d'un ensemble universel. Si un tel ensemble V existait, alors, en prenant $u = V$ et $y = \wp(V)$, on aurait $\wp(V) \subseteq V$, d'où $\wp(V) < \wp(V)$: contradiction.

Réponse de Russell : le théorème de Cantor ne s'applique pas dans le cas particulier où u est V.
En effet, la démonstration de Cantor tire une contradiction de la supposition qu'il existe une surjection $g : u \to \wp(u)$: l'ensemble $C = \{x \in u : x \notin g(x)\}$ ne peut être dans $g(u)$.

Pour $u = V$, $\wp(V) \subseteq V$ donc $g : V \to \wp(V)$ peut être prise comme étant l'identité. Mais alors C n'est rien d'autre que la classe contradictoire $\{x : x \notin x\}$. Donc C ne peut dans ce cas être invoqué.

Pat

Russell conçoit tout ensemble comme une classe, c'est-à-dire comme l'extension d'une fonction propositionnelle.
Certaines extensions ne peuvent être des ensembles (classes en tant que unes), mais tout ensemble correspond à une extension.
Au contraire, ZFC conçoit les ensembles comme les entités définies par une certaine axiomatique du premier ordre.

Russell postule l'existence de la classe universelle.
Au contraire, ZFC démontre (ou plutôt postule) son inexistence.
La sémantique de Tarski (et le particularisme logique) reposent sur l'idée que la généralité absolue est mathématiquement incohérente.

NF

D'autres théories des ensembles que ZFC sont possibles : exemple de NF (Quine, “New Foundations for Mathematical Logic”, 1937).

On maintient le principle de compréhension naïf, mais on le compense par un typage incorporé à la syntaxe du langage. Les variables sont typées, et une formule est dite stratifiée si elle obéit aux règles de la théorie simple des types.

Les axiomes de NF sont :

- Extensionnalité :
  $\forall x^{n+1} \forall y^{n+1} \, [x^{n+1} = y^{n+1} \leftrightarrow \forall z^n (z^n \in x^{n+1} \leftrightarrow z^n \in y^{n+1})]$
- Compréhension pour les formules stratifiées :
  $\forall x \, \exists y \, \forall z \, (z \in y \leftrightarrow \phi(x, z))$
  où ϕ est stratifiée et y non libre dans ϕ.

Puisque $x = x$ est stratifiée, par compréhension il existe un ensemble universel V. D'où $V \in V$, mais aucun paradoxe ne s'ensuit, puisque V n'est pas une variable.

Quine à propos de NF :

> *The variables are to be regarded as taking as values any objects whatever ; and among these objects we are to reckon classes of any objects, hence also classes of any classes.*

Critique philosophique de ZFC : Timothy Williamson

Timothy Williamson, “Everything” (*Philosophical Perspectives*, 2003).
Dans la sémantique de Tarski fondée sur ZFC, tout domaine ou univers de discours est une certaine représentation ou interprétation de « toute chose » (*everything*), mais il n’y a aucun moyen d’avoir vraiment à faire avec « tout ».

Car la seule incarnation de « tout », c’est l’univers ensembliste tout entier, or cet univers n’est justement pas un domaine (ou alors seulement un domaine pour le métalangage du point de vue de quelque méta-métalangage).

Williamson, contradiction n°1

Dans la sémantique de Tarski,

$\forall x \; Fx$ est vrai dans une interprétation M de domaine D

ssi tout $d \in D$ satisfait F dans M

ssi n'importe quelle chose satisfait F dès lors qu'elle appartient à D.

Donc la quantification non restreinte ne peut être évacuée.

Williamson, contradiction n°2

Le particulariste ne peut formuler sa position sans se contredire.
Car lorsqu'on dit :

(P) *Il est impossible de quantifier sur toutes choses*

- ou bien 'toutes choses ' dans (P) a une portée restreinte, et alors (P) est faux ;
- ou bien 'toutes choses ' est non restreint, et alors (P) est un contre-exemple pour la thèse particulariste.

Une solution envisageable est de distinguer entre langage et métalangage et de remplacer (P) par :

(PL) *Il est impossible de quantifier dans L sur toutes choses.*

(PL) n'est pas lui-même un énoncé de L, mais il n'est pas suffisant pour exprimer la thèse particulariste dans toute sa portée.

La voie de l’extensibilité

Kit Fine, “Relatively Unrestricted Quantification” (2003).
Shaughan Lavine, “Something About Everything” (2003).

Les deux articles suggèrent que le domaine de la généralité absolue est à comprendre comme une progression ouverte, chaque domaine n’étant pas anticipé comme la restriction de son extension.
La généralité absolue n’est pas gagée sur un domaine absolument universel donné d’avance, mais recouvre toutes choses, quoi que puisse signifier « toutes choses », c’est-à-dire quelle que soit l’extension du domaine qu’on puisse opérer.

Cette voie est aussi celle de la théorie de la prédicativité (exemple de la définition des ordinaux « prédicativement admissibles »).

Critique philosophique de ZFC : Richard Cartwright

Richard Cartwright ("Speaking of Everything", *Noûs*, 1994) part de l'universalité du langage ordinaire comme d'un fait. Il précise :

> *There is no set that has as members all and only those things that are not members of themselves. But the things that are not members of themselves can simultaneously be the values of the variables of a first-order language ; so at any rate I claim. [. . .] for in order that certain objects be the values of the variables of some first-order language, it is on my view not necessary that there be some one object of which they are the members.*

Cartwright, critique du « Principe du Tout-en-Un »

L'idée de Cartwright est que l'univers de discours dans lequel une variable prend ses valeurs possibles ne fait pas lui-même partie des objets dont on parle.

> *The general principle [the All-in-One Principle] appears to be that to quantify over certain objects is to presuppose that those objects constitute a "collection," or a "completed collection" — some one thing of which those objects are the members [in other words, the set domain of a universe of discourse].*

La possibilité de parler des objets dont on veut parler ne devrait pas être conditionnée par l'existence en tant qu'objet de l'univers de discours formé par ces objets.
Parler des ordinaux, ce n'est pas faire référence à l'objet qu'est l'ensemble de tous les ordinaux.

Le Principe du Tout-en-Un n'est qu'un artefact de la sémantique de Tarski, dans laquelle les valeurs possibles d'une variable doivent constituer un ensemble, qui rétroactivement précède ces valeurs.

La critique de Cartwright vaut notamment pour les mathématiques : lorsqu'on considère l'arithmétique de Peano (PA), on ne veut pas parler d'un modèle de PA, et encore moins de l'espace de tous les modèles de PA : on veut parler des entiers.

Ce Principe illustre en même temps une forme de confusion entre le registre du langage et celui du métalangage, alors même que la sémantique de Tarski est fondée sur la distinction des deux.

Les deux théories des ensembles

Double jeu de ZFC comme théorie formelle et comme métathéorie.

Proposition : Soit M un modèle de ZFC.
Alors il existe $N \in |M|$ tel que $N_M \vDash \mathrm{ZFC}$

où $N_M := \langle |N_M|, \varepsilon_M^N \rangle$ est la *réplique* de N dans M, définie par :

- $|N_M| := \{x \in |M| : M \vDash x \; \varepsilon \; N\}$
- et $\varepsilon_M^N := \{(x, y) \in |N_M| \times |N_M| : M \vDash (x, y) \in \varepsilon^N\}$.

Démonstration dans le cas où M est ω-standard (ne contient pas d'entiers non-standard).
Si M est ω-standard, toutes les formules et preuves de ZFC peuvent être codées par des éléments de M de manière fidèle : aucune M-preuve n'est une pseudo-preuve.

L'existence même de M implique que ZFC est consistante. Donc il n'existe pas de preuve dans ZFC de '$0 = 1$'. Donc il n'existe pas non plus de M-preuve de '$0 = 1$' dans ZFC :
$M \models \ulcorner \mathrm{ZFC} \nvdash 0 = 1 \urcorner$, ou encore :
$M \models \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$.

Comme le théorème de complétude est un théorème de ZFC,
$M \models \ulcorner$Il existe un modèle de ZFC$\urcorner$.
D'où l'existence de $N \in |M|$ tel que $M \models \ulcorner N \models \mathrm{ZFC} \urcorner$,
d'où $N_M \models \mathrm{ZFC}$.

L’univers ensembliste comme « univers »

Un modèle de ZFC apparaît ainsi comme un univers à part entière (il « contient » lui-même des modèles de ZFC). De même, inversement, l’univers ensembliste peut être vu comme un modèle de la métathéorie, ce qui débouche sur la théorie du « multivers » (Joel D. Hamkins).

Jean-Michel : la sémantique de Tarski fait de l’univers ensembliste le substitut du monde.
L’univers d’interprétation de ZFC est comme le monde des objets mathématiques.

L’univers de ZFC est en fait plutôt comme un univers de tous les mondes possibles : un univers dans lequel toute configuration cohérente d’objets mathématiques est représentée au moyen d’un modèle ensembliste.

Dans cet univers, les « vrais » objets mathématiques (ceux qu'étudie le working mathematician) correspondent à l'« interprétation attendue » (*intended interpretation*) des différentes théories mathématiques.

Par exemple, l'interprétation attendue de PA constitue le monde arithmétique actuel.

D'autres mondes arithmétiques possibles existent (d'autres modèles de PA), et les entiers sont en quelque sorte ré-identifiés de monde à monde.

Mais l'univers ensembliste est un univers dans lequel la référentialité est seulement indirecte.

Désignateurs super-rigides

David Kaplan définit un désignateur comme rigide s'il désigne le même référent dans tous les mondes possibles, et comme directement référentiel si, une fois son référent fixé, ce référent devient lui-même le constituent de la proposition dans lequel figure le désignateur :

> *For me, the intuitive idea is not that of an expression which turns out to designate the same object in all possible circumstances [= in all possible worlds], but an expression whose semantical rules provide directly that the referent in all possible circumstances is fixed to be the actual referent.*
> *("Demonstratives", Themes from Kaplan, 1989, p. 493)*

Pour Kaplan, un nom propre ou un indexical est directement référentiel, et c'est la vraie raison pour laquelle il est rigide :

> *If the individual is loaded into the proposition (to serve as the propositional component) before the proposition begins its round-the-worlds journey, it is hardly surprising that the proposition manages to find that same individual at all of its stops [. . .] ; it simply 'discovered' what it had carried in.*
> *("Demonstratives", p. 569)*

La référence directe est exactement ce qui est perdu lorsqu'on passe à ZFC et à la théorie des modèles fondée sur ZFC.

Mais un monde qui exclut toute référence directe n'est pas un monde.

L'univers de ZFC n'est pas un monde, ni même un univers de mondes.

Avec la théorie des modèles fondée sur ZFC, c'est comme si les domaines d'objets mathématiques précédaient les objets mathématiques, comme si les objets se réduisaient à ce qu'on peut identifier et ré-identifier en traversant les différents domaines d'objets.

L'avantage de la conception aristotélicienne, de ce point de vue, est de penser au contraire les objets mathématiques et les domaines d'objets comme contemporains les uns des autres.

Cela étant, il faut distinguer entre les théories. Le cas de PA n'est pas celui de la théorie axiomatique des groupes.

La théorie axiomatique des groupes est en fait la théorie d'un groupe quelconque.

C'est seulement le passage par ZFC qui permet de dégager les différents modèles de la théorie, et ainsi d'accéder à la théorie des groupes au sens propre.

Néanmoins, on voit bien que ZFC est justifiée comme métathéorie essentiellement en tant que théorie des modèles des différentes théories axiomatiques d'espèces de structures.

Évaluation de l’univers ensembliste

On peut revenir à l’idée que ZFC est une pure métathéorie formelle, et que « l’univers de ZFC » n’est qu’une façon de décrire ce qu’on peut dériver dans ZFC. Mais dans ce cas ZFC ne peut plus fournir d’objectivité aux mathématiques.

D’où trois interprétations de l’univers ensembliste :

1. Il est le corrélat superficiel de ZFC comme théorie formelle, mais alors il ne constitue ni ne fournit aucun domaine d’objets. Interpréter une théorie, c’est en fait l’interpréter (au sens proof-theoretic) dans ZFC.
2. Il est un domaine universel d’objets, ou plutôt un domaine de tous les domaines, mais alors il ne constitue pas un véritable univers, pour la raison qu’on vient de dire, et son lien avec le véritable univers (la totalité de toutes choses) est problématique.
3. Il est un méta-domaine (= le domaine de ZFC comme métathéorie), mais alors on tombe dans une régression à l’infini.

Bilan

- Aristote : on a des domaines d'objets spécifiques, mais ils sont supposés donnés et ils n'ont pas d'unité collective.
- Universalisme logique : on a un domaine d'objets unitaire, qui laisse place à des spécifications (cf. livre de Sébastien G.), mais qui est supposé donné (même s'il est structuré par une théorie des concepts ou des fonctions propositionnelles).
- ZFC : on a un univers supposé donné, qui fournit des domaines d'objets (modèles) ; mais cet univers n'est pas un véritable univers, et l'unification des différents domaines d'objets est très relative, tout comme l'est la spécificité de chaque domaine.

Aporie

Quelle voie pourrait-on envisager pour sortir de cette aporie ?

Une chose se dégage : il faut cesser de vouloir assigner aux différentes théories mathématiques des domaines d'objets spécifiques donnés.

Il ne faut pas faire de « sémantique » (en ce sens-là), mais sans pour autant se rabattre sur la seule « syntaxe » (c'est-à-dire en réduisant les théories à leur versant formel).

On peut en même temps retenir de l'universalisme l'idée que les objets mathématiques émergent à partir d'un champ d'objets générique (le pensable, ou une partie du pensable) – champ qui n'est pas lui-même encore un domaine.

Dans cette perspective, chaque branche des mathématiques ne correspond pas à un domaine, mais à une certaine façon de produire et d'organiser un domaine d'objets : inductivement (arithmétique), selon des fibres (géométrie différentielle), par localisation et recollement (théorie de la descente), par pullback à partir d'un classifiant ou « objet universel », etc. (domaines d'échelles variables).

Il y a mathématiques dès qu'il y a usage réglé de variables et par là existence d'un domaine virtuel d'objets, mais les mathématiques concernent justement à chaque fois l'actualisation d'un domaine.

La logique est le lieu où ces différents modes de constitution d'un domaine d'objets peuvent être dégagés et comparés pour éventuellement être croisés.

C'est la raison pour laquelle la logique peut elle-même interagir avec chaque branche des mathématiques plutôt que d'être une pure métamathématique.

Conclusion

La logique relève de la philosophie parce que l'ontologie bien comprise, l'ontologie non naïve, celle qui ne tient pas pour évidemment acquise la possibilité de parler de toutes choses, c'est la logique.

La logique relève en même temps des mathématiques, non pas seulement en tant que métamathématique, mais parce que la logique est plutôt à penser comme le lieu de rencontre des différents modes mathématiques de constitution d'un domaine d'objets.