L'idée d'un entendement mathématique

Brice Halimi

.

Université Paris Ouest (IREPH) & SPHERE

Opérations mentales, 19-20 mai 2016

Qu’est-ce que comprendre en mathématiques ?

Comment décrire les formes les plus élémentaires que prend la compréhension mathématique ?

J’aborderai cette question par le biais de l’incompréhension ou plutôt de la mécompréhension en mathématiques. (On peut dire quelque chose de CERTAINES mécompréhensions.)

En mathématiques, l’esprit opère, mais suivant la médiation fondamentale d’un symbolisme. Les opérations mentales se doublent d’opérations symboliques. Le champ opératoire qui est ainsi déployé symboliquement est organisé par un certain nombres de paramètres qui servent de repères.

Hypothèse : une classe importante de mécompréhensions en mathématiques proviennent d’une confusion entre les objets sur lesquels portent des opérations et les paramètres d’expression de ces opérations.

Sébastien Gandon, « Quelle philosophie pour quelle mathématique ? » (2013) :

> *La théorie du sujet et de ses facultés au XVIIe et au XVIIIe a rendu possible un discours informé sur les techniques mathématiques développées à l'époque. [. . .] la théorie du schématisme chez Kant peut être considérée simultanément comme un dépassement de Leibniz et de Hume, et comme une analyse très fine des procédures de constructions euclidiennes, reprises chez Newton. Autrement dit, au XVIIe et au XVIIIe siècle, des concepts et des arguments avaient un sens indépendamment en métaphysique et en mathématiques. Un même cadre conceptuel permettait alors de circuler souplement entre les deux domaines.*

“Mathematical understanding”

Jeremy Avigad, « Understanding proofs » (2008) :

> *[. . .] I will defend the fairly simple claim that ascriptions of understanding are best understood in terms of the possession of certain abilities, and that it is an important philosophical task to try to characterize the relevant abilities in sufficiently restricted contexts in which such ascriptions are made.*

Dans la lignée de Poincaré, Avigad vise à cerner ce que c’est que comprendre une preuve, au-delà du simple fait de savoir vérifier que chaque étape de la preuve est formellement correcte.

Cette faculté de compréhension d’une preuve mathématique repose elle-même sur un certain nombre de capacités cognitives.

La perspective de Avigad est tout à fait légitime, mais se place d'emblée à un haut niveau épistémique, qu'il est très difficile d'analyser, et qui présuppose un niveau de compréhension plus élémentaire.

Exemples de « capacités mathématiques » mentionnées par Avigad :

- la capacité de justifier la correction de la preuve et d'en compléter toutes les étapes ;
- la capacité de donner une vue d'ensemble de la preuve ;
- la capacité d'identifier les passages clés de la preuve ;
- la capacité de recenser toutes les hypothèses utilisées.

Même problème avec Kenneth Manders, "Logic and Conceptual Relationships in Mathematics" (1985) et avec Danielle Macbeth, "Proof and Understanding in Mathematical Practice" (2012).

Incompréhension, mécompréhension (Wittgenstein)

Au §154 des *Recherches philosophiques*, Wittgenstein considère le cas de quelqu'un qui soudain comprend comment poursuivre l'écriture d'une série de nombres entiers en découvrant la formule algébrique qui la sous-tend.

Exemple (§151) : $1, 5, 11, 19, 29$ / formule : $a_n = n^2 + n - 1$

Wittgenstein entend souligner que c'est à chaque fois dans le contexte global de certaines circonstances particulières (incluant par exemple ma familiarité avec les séries numériques) que ma représentation d'une formule algébrique peut valoir comme critère de ma compréhension.

§154 :

À supposer que quelque chose se trouve « derrière l'énonciation de la formule », il s'agit de certaines circonstances m'autorisant à dire que je peux continuer, — quand la formule me vient à l'esprit. Ne conçois surtout pas la compréhension comme un "processus psychique" [seelischer Vorgang, mental process] ! — Une telle façon de parler te plonge en effet dans la confusion. Mais demande-toi dans quel cas et dans quelles circonstances nous disons : « Maintenant, je sais comment continuer », je veux dire, quand la formule m'est venue à l'esprit. — Au sens où il y a des processus caractéristiques de la compréhension (y compris des processus psychiques), la compréhension n'est pas elle-même un processus psychique.

Comprendre n’est réductible à aucune représentation particulière, ni même à aucune série particulière de représentations.

La compréhension de la règle ne peut être isolée de la mise en œuvre qu’elle régit. Maîtriser un concept ou une règle, ce n’est accéder à aucun contenu mental assignable, c’est s’insérer dans une pratique réglée.

Comprendre la règle qui régit le développement d’une série numérique, ce n’est pas saisir quelque chose qui me donnerait d’anticiper l’ensemble de toutes les applications de la règle (*cf.* §§187 sq.).
Comme le dit Wittgenstein, il ne saurait s’agir de « saisir d’un coup l’usage du mot [ou le sens de la règle] dans son intégralité » (§191).

La grammaire de la compréhension n’est pas celle d’un état mental, ni même celle d’un processus mental.

Pour clarifier son propos, Wittgenstein envisage au §185 des *Recherches* le cas où un élève auquel on a appris à écrire la série $(+2)$:

$$0, 2, 4, 6, 8 \ldots$$

se met à écrire, à partir de 1000 :

$$1000, 1004, 1008, 1012.$$

L'incompréhension que décrit Wittgenstein sert d'instrument de comparaison, pour mettre en lumière ce sur quoi repose notre propre compréhension.

§185 :

Maintenant nous demandons à l'élève de continuer une suite (la suite "+2" par exemple) au-delà de 1000, *— et il écrit :* 1000, 1004, 1008, 1012.

Nous lui disons : « Regarde ce que tu as fait ! »— Il ne nous comprend pas. Nous disons : « Mais tu étais supposé ajouter deux ; et regarde comment tu as commencé la suite ! »— Il répond : « Mais n'est-ce pas correct ? J'ai pensé que c'est ainsi que je devais le faire. »— Ou admettons qu'il dise, en montrant la suite : « J'ai pourtant continué de la même manière ! ».

— Il ne nous servirait à rien de dire : « Mais ne vois-tu donc pas. . . ? »— et de lui donner à nouveau les explications précédentes et les exemples précédents.

— Dans un cas de ce genre, nous pourrions peut-être dire qu'il est naturel à cet homme de comprendre cet ordre et nos explications à la façon dont nous comprenons l'ordre : « Ajoute 2 *jusqu'à* 1000, 4 *jusqu'à* 2000, 6 *jusqu'à* 3000, *etc. »*

Dire que la compréhension de l'instruction ne peut transcender sa mise en œuvre, c'est dire que tous les cas d'application de la règle ne peuvent pas être anticipés « d'un coup », mais c'est dire aussi que toutes les mauvaises compréhensions de la règle ne peuvent être exclues *a priori*.

Avant d'être confrontés à un cas d'incompréhension, nous appliquons la règle, sans réfléchir : obéir à une règle, c'est la suivre aveuglément (§219).

Si Wittgenstein parle de « jeu de langage », c'est aussi parce que toute règle comporte une part d'insaturation, un jeu, que révèlent toutes ses mécompréhensions lorsque celles-ci se produisent.

Notre compréhension est bien la seule correcte, mais pour autant elle ne peut jusqu'au bout se prévaloir de la formulation de l'instruction, comme si cette dernière pouvait la justifier et exclure du même coup toute compréhension incorrecte.
Comme le dit Wittgenstein, « il ne nous servirait à rien » de chercher à expliquer à l'élève son erreur.

La compréhension de ce qu'est l'application correcte de la règle n'est pas justifiable à partir de quelque chose de plus primitif.

La compréhension de la règle repose sur une convention non conventionnelle, sur une convention qui n'admet pas de variante et qui en cela n'est pas arbitraire ; sur une convention qui fait atteindre la limite de l'explicitabilité d'une convention.

L’incompréhension décrite au §185 est à la fois restituable et incompréhensible.

Elle est restituable, parce qu’on peut lui trouver une forme de cohérence : il ne s’agit ni d’une pure et simple erreur, ni d’une incompréhension totale (infra-mathématique).
Manifestement, l’élève comprend ce que nous aurions compris si on nous avait dit : « Ajoute 2 jusqu’à 1000, puis 4 jusqu’à 2000, puis 6 jusqu’à 3000, etc. »
L’incompréhension relève donc d’un scénario rationalisable jusqu’à un certain point.

Mais l’incompréhension décrite est en même temps totalement incompréhensible, car précisément nous ne pouvons la comprendre qu’en lui faisant correspondre une autre instruction que celle qui avait été donnée, comme si le sens des mots était modifié, sans pour autant pouvoir être clarifié.

L'exemple que considère Wittgenstein au §185 est à la fois une mécompréhension et une incompréhension, et nous invite à aborder la compréhension en mathématiques suivant l'angle de la non-compréhension.

La compréhension mathématique commence par la capacité de trouver ses repères, mais ces repères n'apparaissent comme tels qu'à partir d'une expérience de désorientation caractéristique du fait « d'être perdu en maths ».

Parce qu'il met l'accent sur l'idée de règle et d'entraînement, Wittgenstein cherche avant tout à différencier la compréhension de tout « processus mental ».

Néanmoins, la compréhension mathématique (par exemple celle du développement d'une série numérique) n'est pas séparable d'un faisceau de compétences qui relèvent de capacités mentales, c'est-à-dire de la capacité d'effectuer et de représenter certaines opérations mentales.

Parenthèse : l'idée de « thématisation » chez Cavaillès

- Paradigme (formalisation) : Passage de $2 + 3 = 5$ à $x \oplus y = z$
- Thématisation (abstraction « transversale ») : Passage de $x \oplus y = z$ à une théorie abstraite des propriétés d'opérations (commutativité, associativité, etc.)

Thématisation = transformation d'une opération en objet explicite d'un champ opératoire d'ordre supérieur.

> *dans le moment qui dégage le sens apparaît une dualité [. . .] entre la signification d'une opération en tant qu'elle est opérée — abstraction faite du problème dont l'exigence a créé sa singularité active, et dépouillée par la substitution possible de l'accidentel de son départ — et sa signification en tant qu'opérante, c'est-à-dire le sens non du passage mais du quomodo de celui-ci [. . .].*
> *(Sur la logique et la théorie de la science, p. 31)*

Paramètres et objets des opérations mathématiques

Reprenons l'incompréhension du §185 : à partir de 1000, l'élève ajoute 4, à partir de 2000 il ajoute 6, etc. : 1000, 2000, . . . , sont des quantités atteintes par la série, mais sont prises par l'élève comme des paramètres du développement de la série.

Le mathématicien ne peut en général opérer sans un contexte qui permet de situer les choses, « de fixer les idées ».

Les paramètres constitutifs de ce contexte opératoire ne sont pas d'emblée des objets sur lesquels opère l'esprit, mais peuvent devenir eux-mêmes des objets manipulables.

Dans ce qui suit, je voudrais montrer que cette confusion entre objets et paramètres est une source fondamentale de non-compréhension en mathématiques.

Exemple de non-compréhension, dans le domaine de la combinatoire

Scénario élémentaire :
« Soit a, b et c trois objets, et soit la permutation qui échange a et c en laissant b inchangé. »

Une permutation est une bijection d'un ensemble vers lui-même.

On représente une permutation (pour les ensembles finis) au moyen de lettres schématiques. En l'occurrence :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Bien sûr, on aurait pu choisir de travailler avec $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ ou $\{a_1, a_2, a_3\}$ plutôt qu'avec $\{a, b, c\}$.
Ou encore : on aurait pu appeler *a*, '*b*' —et inversement.

Mais cela ne veut évidemment pas dire qu'on considère l'ensemble $\{a, b, c\}$ à interversion près de *a* et de *b* !

La représentation même de permutations présuppose que les lettres avec lesquelles on travaille ont été fixées une fois pour toutes.

Les lettres *a*, *b* et *c* sont des paramètres variables dans la mesure où elles sont arbitraires, mais non pas, bien sûr, au sens de la variation qu'elles permettent de représenter.

Indexation

L'ensemble des permutations sur un ensemble $X = \{a, b, c, d\}$ à 4 éléments est la même chose que l'ensemble des permutations sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.
Ou plutôt, c'est la même chose dès lors qu'une indexation des éléments de X a été fixée, par exemple :

$$1 \mapsto b, 2 \mapsto c, 3 \mapsto d, 4 \mapsto a$$

Dans le cas où $X = \{1, 2, 3, 4\}$, une indexation est « canonique » : l'indexation triviale qui prend chaque nombre comme son propre indice :

$$1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 4$$

Dans la représentation standard des choses, les indices sont les numéros correspondant aux nombres. Les nombres sont leurs propres numéros.

Mais que se passe-t-il, dès lors, si les nombres sont confondus avec des numéros ?

Cette confusion revient à comprendre les chiffres 1, 2, 3, . . . non comme des objets individuels (nombres), mais comme des rangs (indices ou numéros).

Soit π la permutation suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ici 1, 2, 3 et 4 désignent des objets, comme le montre l'itération de π :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} .$$

Interprétation non-standard de π

Imaginons que l'on comprenne $1, 2, 3, 4$ comme des rangs plutôt que comme des objets, et que l'on comprenne chaque nouvelle ligne apparaissant dans l'itération de π comme une réindexation des rangs :

$$\begin{aligned} L_1 &= 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4 = 1.1\ \ 2.1\ \ 3.1\ \ 4.1 \\ L_2 &= 4\ \ 3\ \ 1\ \ 2 = 1.2\ \ 2.2\ \ 3.2\ \ 4.2\ . \end{aligned}$$

4 devient, pour ainsi dire, « le nouveau 1 », c'est-à-dire la nouvelle position n°1.
De même, 3 devient « le nouveau 2 », et ainsi de suite.

Dans cette perspective, 1 est un rang —l'index de la première position sur la ligne courante—, et chaque application la permutation π correspond à une perturbation des rangs à partir de l'indexation de départ.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Selon l'interprétation non-standard, la troisième ligne L_3 (première itération de π) est déterminée ainsi :

> « 4 *devient* 2*, mais comme* 2 *est à présent* 3 *(puisque* $2.2 = 3$*),* 4 *est finalement envoyé sur* 3*. Donc* 3 *est le premier chiffre à écrire sur* L_3*.* »

Le principe de base qui guide l'interprétation non-standard est que 4 sur L_1 devient 2 sur L_2, mais 2 entendu au sens du nouveau code mis en place par L_2, c'est-à-dire $2.2 = 3$. De même, 3 devient 1, mais au sens de $1.2 = 4$.

On aboutit finalement à :

$$L_3 \;=\; 3\;\;4\;\;2\;\;1 \;=\; 1.3\;\;2.3\;\;3.3\;\;4.3$$

Bilan

L'itération correcte de π est :

$$\begin{array}{lcccc} L_1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ L_2 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ L_3 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array},$$

Selon l'interprétation non-standard, l'itération de π est :

$$\begin{array}{lcccc} L_1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ L_2 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ L_3 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{array}.$$

L'interprétation non-standard revient à interpréter les nombres sur lesquels agit une permutation comme des rangs flottants, sont la valeur est réactualisée à chaque nouvelle étape.

Incompréhensions compréhensibles en mathématiques

L'interprétation non-standard est évidemment complètement fausse.

Elle est fondée sur une confusion des nombres-comme-objets (au sens où 4 est envoyé sur 2) avec des nombres-comme-rangs-contextuels (au sens où 3 devient « le nouveau 2 » dans le contexte de L_2).

Mais cette interprétation non-standard, bien que fausse, n'est pas pour autant absurde, c'est-à-dire incompréhensible. Certaines incompréhensions en mathématiques sont compréhensibles.

Ces incompréhensions concernent souvent la façon dont les indexations, les différents repérages fonctionnent en mathématiques.

Repérages

Les permutations sur un ensemble sont autant de symétries de cet ensembles, mais présupposent, pour leur représentation, l'introduction d'un repérage de référence par rapport auquel elles peuvent justement apparaître comme des symétries.

Ce repérage prend la forme d'une indexation plus ou moins arbitraire qui permet de rigidifier une certaine situation, et ainsi de représenter des symétries sans être pris de vertige.

De façon générale, les indices, numérotations, paramétrages et éléments distingués jouent un rôle essentiel en mathématiques : ce sont autant de moyens locaux de « fixer les idées ». J'emploie le terme général de REPÉRAGE pour désigner ces notations.

Un repérage est l'introduction de coordonnées qui rend une structure mathématique manipulable en tuant toute symétrie parasite.

Exemples de repérages

- l’écriture d’une permutation ;
- le choix d’une origine pour l’espace affine, qui conduit à l’espace vectoriel sous-jacent ;
- le choix arbitraire d’un point-base pour la définition du groupe fondamental d’un espace topologique connexe par arcs ;
- la présentation d’un groupe par générateurs et relations.

Les repérages correspondent à tous les usages mathématiques de choix arbitraires notationnellement explicites et contrôlés.

Thèse

La plupart des structures mathématiques ne sont accessibles (à la fois descriptibles et analysables) qu'à travers la médiation d'un repérage.

Exemple des vecteurs, présentés au moyen de points (repérage = choix d'un point-origine).

Exemple des permutations sur un ensemble X à quatre éléments (repérage : choix d'une indexation de X).

Les repérages ne sont pas de simples outils auxiliaires, ni de simples appareillages psychologiques, mais des constituants essentiels de la connaissance mathématique aussi bien que de l'objectivité mathématique.

Ce sont les schèmes de l'entendement mathématique (avec la construction dans l'intuition pure remplacée par la symbolisation dans le langage).

Variabilité des paramètres, variation des objets

Une fois une origine O choisie, chaque point A du plan peut être vu comme un vecteur, à savoir le vecteur $\vec{OA}$.
Le choix d'un point-origine est un repérage qui permet de présenter les vecteurs à travers les points du plan, et par là justement d'*opérer* sur les points (d'ajouter un point à un autre).

L'ensemble des vecteurs est « isomorphe » à l'ensemble des points du plan, mais seulement une fois qu'un point O du plan a été distingué pour jouer le rôle de l'origine.

Tant que ce choix n'a pas été fait, le plan est seulement virtuellement isomorphe à l'ensemble des vecteurs.

Tout repérage implique des choix arbitraires, et en ce sens est variable puisqu'il aurait pu avoir été choisi différemment.

Mais cette variabilité reste purement virtuelle : une fois fixé, un repérage ne peut justement pas changer. Sinon les pires confusions s'ensuivent (comme on l'a déjà vu).

L'interprétation non-standard revient justement à confondre la variabilité virtuelle des paramètres d'un repérage avec la variabilité actuelle des objets présentés dans le cadre de ce repérage.

Autres exemples de confusions :

- « Si on calcule 30% de 60%, est-ce qu'on doit considérer que 30%, dans ce contexte, signifie en réalité 30 pour 60, sachant que 30% s'applique non pas à 100%, mais à 60% ? »
  On confond ici une quantité (30 ou 60) exprimée dans un certain repérage, avec un paramètre de ce repérage (100).
- « Si on cherche à écrire 14 en base 3, est-ce qu'il faut commencer par réécrire le 4 de '14' en base 3 ? »
  On confond ici les chiffres du système décimal avec des nombres ou quantités.

Cécité aux repérages

Les repérages mathématiques sont les conditions épistémiques de manipulabilité des objets mathématiques.

La confusion épistémique (non pas philosophique) entre repères et objets, le montre *a contrario*.

Premier exemple de cette confusion : l'interprétation non standard d'une permutation.

Cette interprétation revient à confondre les paramètres d'un repérage (à savoir la *numérotation* $1, 2, 3, 4$) avec les objets présentés par ce repérage.

Second exemple de confusion.
Soient les deux permutations suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Ce que la première permutation fait avec b, la seconde le fait avec c, et vice versa.

La confusion consiste alors à dire : « Mais après tout, l'objet b aurait pu être appelé 'c', et *vice versa*, donc les deux permutations sont en fait identiques. »

Les deux permutations sont bien symétriques en vertu de l'échange de b et de c, mais cette symétrie ne rend nullement admissible la méta-permutation des paramètres du repérage.

Ici b et c sont à comprendre comme des objets fixés, et non comme des paramètres renommables.

Conclusion 1 (philosophie des mathématiques)

Un repérage n'est ni une structure « telle quelle », ni une simple instance de cette structure. Et il est fondamental de reconnaître ces trois niveaux (structures, repérages, instances) dans leur irréductibilité les uns aux autres.

Un repérage n'est pas une structure : ses paramètres sont une « décoration » arbitraire.

Un repérage n'est pas non plus une instance : tout ce qui est déductible d'un repérage vaut de la structure, ce qui n'est pas vrai d'une instance).

Une structure est la forme abstraite de toutes ses instances possibles, tandis qu'elle est l'invariant de tous ses repérages possibles.

Conclusion 2 (opérations mentales)

Comprendre un repérage, en bien user, c'est viser une structure à travers des notations qui fixent les idées, dans un environnement tel qu'on voit qu'un changement cohérent de notations « ne changerait rien ».

La maîtrise de repérages est un trait fondamental de la connaissance mathématique. Elle consiste à maîtriser l'interaction des opérations mentales et des opérations symboliques, en ne confondant pas les objets des premières avec les paramètres des secondes.

D'où l'importance de comprendre la possibilité de *certaines* incompréhensions en mathématiques : car l'analyse des opérations épistémiques en mathématiques demande aussi de comprendre de quelles manières elles peuvent mal se passer.