Sur la théorie algébrique des ensembles

Brice Halimi

Université Paris Ouest

- Présentation synthétique de certains aspects de la « théorie algébrique des ensembles ».
  La théorie algébrique des ensembles est une reconstruction de la théorie des ensembles (théorie de Zermelo-Fraenkel) dans un cadre catégorique, proposée par André Joyal et Ieke Moerdijk au milieu des années 90.
- Rivalité peu pertinente et peu féconde de la théorie des ensembles et de la théorie des catégories comme cadres fondationnels concurrents.
  Théorie algébrique des ensembles = cas de *croisement* de deux théories, de *greffe* d'une théorie (la théorie des fibrations) sur une autre (la théorie de Zermelo-Fraenkel).
- Mise en vedette du concept de fibration.
  Usages avérés ou possibles du concept de fibration en logique philosophique.

Théorie des topos

- Axiome d'extensionnalité : $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$.
- Axiome de la paire : $\forall a\ \forall b\ \exists c\ \forall x\ (x \in c \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$.
- Schéma de séparation : Pour toute formule $\varphi(x)$ et tout ensemble x, il existe un ensemble y tel que $\forall z\ (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z)))$.
- Axiome de la réunion : $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow \exists u\ (u \in x \wedge z \in u))$.
- Axiome de l'ensemble des parties : $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$. (On note : $y = \wp(x)$.)
- Schéma de remplacement : Pour toute formule $R(x, y)$, on a $[\forall x\ \forall y\ \forall y'\ (R(x, y) \wedge R(x, y') \rightarrow y = y')] \rightarrow [\forall u\ \exists v\ \forall z\ (z \in v \leftrightarrow (\exists t \in u\ R(t, z)))]$. (On peut écrire $y = f(x)$ au lieu de $R(x, y)$.)
- Axiome de l'infini : Il existe un ensemble inductif.

En fait, la théorie ZF consiste dans les axiomes d'extensionnalité, de la réunion, de l'ensemble des parties, de remplacement et de l'infini. Le schéma de séparation découle du schéma de remplacement. En effet, si l'on prend $y = x \wedge \varphi(x)$ pour $R(x, y)$ dans le schéma de remplacement, on obtient le schéma de séparation.

Un *topos de Grothendieck* est une catégorie équivalente à la catégorie des faisceaux sur un site. Ce n'est pas intrinsèquement un univers ensembliste généralisé.

Un *topos élémentaire* est une catégorie E qui possède des produits fibrés (« pullbacks »), un objet final 1, un objet Ω et un monomorphisme $\top : 1 \rightarrowtail \Omega$ tels que

- pour tout sous-objet $m : S \rightarrowtail B$ il existe un unique morphisme caractéristique $\chi_m : B \to \Omega$ tel que le diagramme
$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, "m"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ B \arrow[r, dashed, "\chi_m"'] & \Omega \end{tikzcd}$$
commute ;
- pour tout objet B il existe un objet $PB \simeq \Omega^B$ et un morphisme $\in_B : B \times PB \to \Omega$ tels que pour tout morphisme $f : B \times A \to \Omega$ il existe un unique morphisme $g : A \to PB$ tel que le diagramme
$$\begin{tikzcd} B \times A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1\times g"'] & \Omega \\ B \times PB \arrow[ur, "\in_B"'] & \end{tikzcd}$$
commute.

On peut adopter à propos d'un topos élémentaire E, soit une perspective interne, soit une perspective ensembliste externe. Constructions ensemblistes pour lesquelles E dispose d'une contrepartie interne :

externe	interne
$\mathrm{Hom}_E(A, B)$ = ensemble externe des morphismes de A vers B	B^A = exponentiel interne
$\mathrm{Sub}(A) \simeq \mathrm{Hom}_E(A, \Omega)$ = ensemble externe des sous-objets de A	PA = objet interne des parties

NB : une formule $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ du langage de zfc est dite *absolue* si, pour tout modèle M de zfc et pour tous $a_1, \ldots, a_n \in |M|$, $M \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$ ssi $\phi(a_1, \ldots, a_n)$ est vrai (dans l'univers d'arrière-plan). En particulier, la formule '$x_2 = \wp(x_1)$' n'est pas absolue.

À tout topos élémentaire E est associé une *logique interne* L_E. Le langage de L_E est un langage typé dont les types sont les objets de E, dont les symboles de fonction sont les morphismes de E et dont les termes sont construits et typés de la façon suivante :

- il existe des variables $x : X$ pour tout type X
- pour $t : X$ et $u : Y$, $(t, u) : X \times Y$
- pour $f : X \to Y$ et $t : X$, $f(t) : Y$
- pour $t : X$ et $\theta : Y^X$, $\theta(t) : Y$
- pour $t : X$ et $\theta : \Omega^X$, $t \in \theta : \Omega$
- pour $x : X$ et $t : Y$, $\lambda x.t : Y^X$.

Tout terme t de type X est interprété par un morphisme $[t]$ de but X :

- $[x : X] = 1_X$
- pour $[t] : U \to X$ et $[u] : U' \to Y$,
  $[(t, u)] = \langle [t] \circ p_1, [u] \circ p_2 \rangle : U \times U' \to X \times Y$
- étant donnés le sous-objet $\Delta_X : X \to X \times X$ et son morphisme caractéristique χ_{Δ_X},
  $[t = u] = \chi_{\Delta_X} \circ [(t, u)] : U \times U' \to \Omega$
- pour $[t] : U \to X]$ et $[\theta] : U' \to \Omega^X]$,

  $[t \in \theta] = \ U \times U' \xrightarrow{\langle [t], [\theta] \rangle} X \times \Omega^X \xrightarrow{\text{ev}} \Omega$
- etc.

Une *formule* est un terme de type Ω. On note $\phi(x, y)$ pour une formule construite au moyen des variables libres $x : X$ et $y : Y$. L'interprétation $[\phi(x, y)]$ est alors un morphisme $X \times Y \to \Omega$.

- Pour $[\phi] : U \to \Omega$ et $[\psi] : U' \to \Omega$,
  $[\phi \wedge \psi] = \wedge \circ \langle [\phi] p_1, [\phi] p_2 \rangle : U \times U' \to \Omega$
- Pour $[\phi(x)] : X \to \Omega$, on note $\{x \in X : \phi(x)\}$ le sous-objet de X classifié par $[\phi(x)]$:

$$\begin{tikzcd}
\{x \in X : \phi(x)\} \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
X \arrow[r, "{[\phi(x)]}"'] & \Omega
\end{tikzcd},$$

  comme si l'objet X avait des éléments x.
- Pour toute formule $\phi(x)$, on introduit la formule $\forall x : X \ \phi(x)$, interprétée par
  $[\forall x : X \ \phi(x)] = [\{x \in X : \phi(x)\} = \{x \in X : \top = \top\}]$.

- Pour $\phi(x,y)$, on a la projection canonique $\pi : X \times Y \to Y$, $\pi^{-1} : \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X \times Y)$ et π^{-1} possède un adjoint à droite qu'on note $\forall : \mathrm{Sub}(X \times Y) \to \mathrm{Sub}(Y)$. On définit alors $[\forall x : X\ \phi(x,y)]$ comme le morphisme caractéristique de $\forall(\{(x,y) \in X \times Y : \phi(x,y)\})$:

$$\begin{tikzcd}
\forall(\{(x,y) \in X \times Y : \phi(x,y)\}) \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
Y \arrow[r, "{[\forall x:X\ \phi(x,y)]}"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Si σ est un énoncé, $[\sigma] : 1 \to \Omega$ et on note $E \models \sigma$ si $[\sigma] = \top$.

La collection des énoncés vrais dans tous les topos est une théorie intuitionniste faible (faible, car toute quantification est à chaque fois bornée à un certain objet du topos considéré).

Or un certain nombre de constructions relatives à un topos ne sont pas petites, c'est-à-dire ne peuvent pas être considérées de manière interne, à l'échelle d'un seul objet (type) ; exemple d'une topologie de Grothendieck sur ce topos, ou de la collection de tous les objets du topos.

Distinction entre ensembles et classes propres.
Versant positif du paradoxe de Russell : preuve de l'existence de certaines classes propres, par exemple $\{x : x \notin x\}$ et du coup $\{x : x = x\} = V$.

Le projet de la théorie algébrique des ensembles est d'étendre le raisonnement ensembliste à des structures non petites, en formalisant la distinction entre ensembles et classes et en proposant ensuite une théorie des ensembles du premier ordre où la quantification à l'échelle de classes est possible.

On peut formaliser la théorie des topos élémentaires sous la forme d'une théorie bi-sortée du premier ordre, mais il ne s'agit pas d'une théorie des ensembles.
La logique interne d'une topos est une théorie des ensembles interne à ce topos, mais ce n'est pas une théorie formelle (pas de quantification non restreinte).

Approche logique

Une catégorie *régulière* est une catégorie C telle que

- toutes les limites finies existent
- pour tout pullback

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, dashed, "p_2"] \arrow[d, dashed, "p_1"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

dans C, le coégalisateur c de p_1 et p_2 existe ($\begin{tikzcd} {} \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & X \arrow[r, "c"] & {} \end{tikzcd}$, $cp_1 = cp_2$) ;

- pour tout pullback

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

dans C, si f est un épimorphisme régulier ou strict (c'est-à-dire un épimorphisme qui est le coégalisateur d'une paire de morphismes de C), alors g également.

Une *structure de classe* sur une catégorie régulière C consiste en une collection S de morphismes de C qui vérifie certaines propriétés. Les morphismes de S seront dits « petits » (cf. plus bas). Les premières conditions portant sur S sont les suivantes :

- S est identifiable à une sous-catégorie de C qui a les mêmes objets que C ;
- S contient tous les monomorphismes de C ;
- S est stable par pullback.

La collection S satisfait en outre les deux axiomes suivants :
1) Axiome de représentabilité : pour tout objet B de C, il existe un objet $\wp_S B$ et une petite relation $\in_B$ de $\wp_S B$ vers B (c'est-à-dire un sous-objet de $\wp_S B \times B$) telle que, pour toute petite relation R d'un objet A vers B, il existe un unique morphisme $\bar{R} : A \to \wp_S B$ composant un pullback

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & \in_B \arrow[d] \\ A \times B \arrow[r, "\bar{R}\times 1"'] & \wp_S B \times B \end{tikzcd} .$$

Cet axiome signifie la possibilité, pour toute relation R de A vers B, d'associer à tout « élément » de A l'« ensemble » de ses relata dans B.
2) Axiome de l'ensemble des parties : pour tout objet B, la relation de compréhension $\supseteq$ de $\wp_S B$ vers $\wp_S B$ est petite, ce qui veut dire que le composé $\supseteq \rightarrowtail \wp_S B \times \wp_S B \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \wp_S B$ est dans S.
Cet axiome entraîne que, pour tout objet B, si B est petit alors il en est de même de $\wp_S B$.

On peut définir à partir de là ce qu'est un modèle de la théorie des classes : une *catégorie de classes* (« classic model ») est une catégorie régulière munie d'une structure de classe, d'un objet $1 \xrightarrow{0} \mathcal{N} \xrightarrow{s} \mathcal{N}$ des entiers naturels et d'un *univers*, c'est-à-dire d'un objet U tel que $\wp_S U \rightarrowtail U$.

Proposition (Simpson)

Pour tout énoncé ϕ du langage de la théorie des ensembles, $\langle C, U \rangle \models \phi$ pour toute catégorie de classes $\langle C, U \rangle$ ssi ist $\vdash \phi$*.*
*(*ist $=$ *théorie des ensembles intuitionniste.)*

Awodey & co. Programme général consistant à établir des résultats de correspondance entre certaines axiomatiques ensemblistes et certaines classes de structures de classes.
Les axiomes sont formulés dans un langage contenant 'S' et '$\in$'.
Exemple : $S(x) \to \exists y(S(y) \wedge \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x))$.

bcst = axiomes ensemblistes élémentaires + axiome de remplacement
cst = **bcst** + axiome de l'ensemble des fonctions
bist = **cst** + axiome de l'ensemble des parties

Structure de classe basique (s.c.b.) = structure de classe - axiome 2
Structure de classe prédicative (s.c.p.) = s.c.b. + exponentiation (si f est dans S, alors Π_f envoie un morphisme de S sur un morphisme de S)
Structure de classe close (s.c.c.) = s.c.b. + axiome 2

Théories	Catégories de classes
bcst	s.c.b.
cst	s.c.p.
bist	s.c.c.

Importance de l'existence d'un objet universel U.

Si tous les objets de C sont petits, alors C est essentiellement un topos et $P_S(X)$ est identique à PX.

L'existence de $P_s(U) \overset{i}{\rightarrowtail} U$ garantit la possibilité d'interpréter des classes (formules dont les variables sont non bornées).

Pour une formule $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ du langage interne de C, on obtient :

$\{x_1, \ldots, x_n : \phi\} \rightarrowtail U \times \ldots \times U$,

sachant que $\{x : S(x)\} = P_s(U) \overset{i}{\rightarrowtail} U$

et que $\{x, y : x \in y\} = \in_U \rightarrowtail U \times P_s(U) \xrightarrow{1_U \times i} U \times U$.

Approche géométrique

Un *prétopos de Heyting* est une catégorie C si :

- C possède des produits fibrés et un objet final ;
- C possède des coproduits finis (sommes finies disjointes) qui commutent aux produits fibrés : $\coprod_i X' \times_Y X_i \simeq X' \times_Y \coprod_i X_i$;
- toute relation d'équivalence $\langle \partial_1, \partial_2 \rangle : R \rightarrowtail X \times X$ sur X, notée $R \underset{\partial_2}{\overset{\partial_1}{\rightrightarrows}} X$, donne lieu à un morphisme quotient u_R, c'est-à-dire à un coégalisateur de (∂_1, ∂_2) dont (∂_1, ∂_2) est la « paire noyau » ;
- pour toute relation d'équivalence $R \underset{\partial_2}{\overset{\partial_1}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{u_R} Y$ et pour tout morphisme $Z \xrightarrow{h} Y$, $Z \times_Y R \rightrightarrows Z \times_Y X \xrightarrow{1_Z \times u_R} Z \times_Y Y$ est encore une relation d'équivalence : autrement dit, $u_{Z \times_Y R} = 1_Z \times u_R$ (les relations d'équivalence commutent aux produits fibrés) ;

- pour tout morphisme $f : X \to Y$, f^{-1} admet un adjoint à droite $\forall_f$ (cf. interprétation de la formule $\forall x : X\ \phi(x, y)$ de L_E) ;
- C possède un objet des entiers naturels $1 \xrightarrow{0} \mathcal{N} \xrightarrow{s} \mathcal{N}$.

On cherche alors à caractériser une classe S de morphismes dans C, qu'on appellera la classe des « petites flèches » : les membres de S sont censés être les morphismes de C dont toutes les fibres sont petites, c'est-à-dire de la taille d'ensembles.

Un objet X de C est dit *petit* si $X \to 1$ est une petite flèche, autrement dit un membre de S. Une petite flèche $f : Y \to X$ peut elle-même être décrite comme un petit objet *sur* X.

Exemples de petits ensembles :

- les ensembles finis
- les ensembles de cardinal $< \kappa$ pour un cardinal κ donné
- les ensembles en général (par opposition aux classes propres).

Les conditions portant sur S sont les suivantes :

1. Tout isomorphisme de C est dans S et la composition de deux membres de S est un membre de S.
   « L'union d'une petite famille de petits ensembles est un petit ensemble. »
2. Stabilité par changement de base : pour tout produit fibré
$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r] & X \end{tikzcd},$$
   si f est dans S, alors g aussi.
3. « Descente » : pour tout produit fibré le long d'un épimorphisme
$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, two heads, "\text{épi}"'] & X \end{tikzcd},$$
   si g est dans S, alors f aussi.

4. Les morphismes $0 \to 1$ et $1 + 1 \to 1$ sont dans S.
   Cet axiome garantit que l'ensemble vide est un petit ensemble et que l'union disjointe de deux petits ensembles est un petit ensemble. En particulier, l'ensemble à deux éléments est petit.
5. Si $f : Y \to X$ et $f' : Y' \to X'$ sont dans S, alors leur somme $f + f' : Y + Y' \to X + X'$ aussi.
   Cet axiome garantit que l'union disjointe de deux petits ensembles est un petit ensemble.
6. Pour tout diagramme commutatif du type :

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, two heads, "p"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \arrow[dl, "f"] \\
& B &
\end{tikzcd},$$

   si g est dans S, alors f aussi.

7. Axiome de collection : pour tout épimorphisme $p : Y \twoheadrightarrow X$ et pour tout morphisme $f : X \longrightarrow A$ dans S, il existe un quasi-produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr] \arrow[dr, two heads, "\text{épi}"] \arrow[dd, "g"'] & & Y \arrow[r, two heads, "p"] & X \arrow[dd, "f"] \\
& X \times_A B \arrow[urr, dashed] \arrow[dl, dashed] & & \\
B \arrow[rrr, two heads, "\text{épi}"'] & & & A
\end{tikzcd}$$

avec g dans S.
Ce dernier axiome correspond à l'axiome ensembliste suivant :
Si $\forall y \in x\ \exists z \phi(y,z)$, alors $\exists w\ \forall y \in x\ \exists z \in w\ \phi(y,z)$ et $\forall z \in w\ \exists y \in x\ \phi(y,z)$.

8. Tout morphisme $f : Y \to X$ dans S est exponentiable : $- \times f : (Z \to X) \mapsto (Z \times_X Y \to X)$ admet un adjoint à droite. Cet axiome garantit que, si X est petit, alors l'ensemble Z^X de toutes les fonctions de X dans n'importe quel ensemble Z, est lui-même un petit ensemble.
9. S admet un morphisme universel $\pi : E \to U$: pour tout morphisme $f : Y \to X$ dans S, il existe un double produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "f"'] & Y' \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\
X & X' \arrow[l, two heads, "\text{épi}"] \arrow[r] & U.
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, tout morphisme dans S est « localement » un pullback de π. Je reviendrai sur l'expression « localement ». L'ensemble U est ainsi le classifiant de tous les petits ensembles.

Soit C une catégorie munie d'une classe S de petites flèches.
Une *famille I-indexée de petits sous-objets de X* est un sous-objet $S \rightarrowtail I \times X$ tel que le composé $S \rightarrowtail I \times X \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} I$ est dans S.
On peut alors définir l'« ensemble » $P^s(X)(I)$ de toutes les familles I-indexées de petits sous-objets de X.

Cela induit un foncteur $P^s(X) : C^o \to \mathrm{Ens}$.

Theorem

Le préfaisceau $P^s(X)$ est représentable : il existe un objet $P_s(X)$ de C tel que $P^s(X) \simeq Hom_C(-, P_s(X))$.

$P_s(X) =$ candidat au rôle d'ensemble des parties de X. Il reste à faire apparaître $P_s(X)$ comme une forme d'algèbre de Heyting (= treillis possédant des exponentiels).

NB : si L un ensemble partiellement ordonné dans C, alors, pour tout objet A de C, $\mathrm{Hom}_C(A, L)$ est naturellement muni d'une structure d'ensemble partiellement ordonné.

Pour $g : B \to A$ et $\lambda : B \to L$, la *borne supérieure de λ le long de g* est un morphisme $\mu : A \to L$ tel que, pour tout $t : L' \to A$ et tout $\nu : L' \to L$

$$\begin{tikzcd}
L' \times_A B \arrow[r, dashed, "p_2"] \arrow[d, dashed, "p_1"'] & B \arrow[rd, "\lambda"] & \\
L' \arrow[r, "t"] \arrow[rr, bend right, "\nu"'] & A \arrow[r, dashed, "\mu"] & L
\end{tikzcd}$$

$\lambda \circ p_2 \leq \nu \circ p_1$ dans $\mathrm{Hom}_C(L' \times_A B, L)$ ssi $\mu \circ t \leq \nu$ dans $\mathrm{Hom}_C(L', L)$.
On note alors : $\mu = \bigvee_g \lambda$.
Dans le langage interne de C, cela se traduit par : pour tout « élément » a de A, $\mu(a) = \sup_{b \in B, g(b)=a} \lambda(b)$.

Definition

L est dit *S-complet* si la borne supérieure de n'importe quel morphisme le long de n'importe quelle petite flèche existe dans C.

En particulier, L contient la borne supérieure du sous-ensemble vide de L (qui est bien un petit ensemble), et donc possède un plus petit élément 0. De même, comme l'ensemble à deux éléments est petit, L est munie de l'opération binaire $L \times L \to L$ qui donne le maximum de deux « éléments » de L.

Plus généralement, l'ensemble L est muni d'une opération k-aire pour toute fibre k d'une petite flèche de but L, à savoir l'opération qui donne la borne supérieure de tout ensemble indexé par k (faisant de L un ensemble k-dirigé).

Proposition

Pour tout objet X de C, $P_s(X)$ est S-complet. C'est le semi-treillis S-complet libre engendré par X.

Definition

Une zf-*algèbre* dans C est un semi-treillis S-complet L dans C muni d'un morphisme $s : L \to L$.

Le morphisme s correspond à l'opération singleton. C'est une opération distinguée qui s'ajoute à toutes les autres opérations dont est munie L. D'autre part, l'ordre $\leq$ à la relation d'inclusion. On définit ainsi naturellement une relation d'appartenance $\epsilon \rightarrowtail L \times L$ sur L en posant :

$$x \,\epsilon\, y \quad \text{ssi} \quad s(x) \leq y \ .$$

Definition

Un morphisme de zf-*algèbres* $(L, s) \to (L', s')$ dans C est un morphisme $f : L \to L'$ qui préserve les bornes supérieures le long des petites flèches et tel que

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[d, "f"] \\ L' \arrow[r, "s'"] & L' \end{tikzcd}$$

commute.

Tout objet A de C, la zf-*algèbre libre sur* A correspond en théorie des ensembles à la hiérarchie cumulative sur A et se note, comme en théorie des ensembles, $V(A)$.

Théorie algébrique des ensembles : $V(A) =$ zf-algèbre libre sur A

Théorie des ensembles zfc :

- $V_0(A) = A$
- $V_{\beta+1}(A) = A \cup \wp(V_\beta(A))$
- $V_\lambda(A) = \bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta(A)$ pour λ limite
- $V(A) = \bigcup_\alpha V_\alpha(A)$

Pour $A = 0$, on écrit V à la place de $V(A)$.

Proposition

Pour tout objet de C, $V(A)$ existe dans C.

Proposition

Pour toute catégorie de classes $\langle C, S\rangle$ et tout objet A de C, $\langle C/A, S_A\rangle$ est une catégorie de classes, où $S_A =$ collection de tous les membres de S qui ont A pour but.

Proposition

$V_{\langle C/A, S_A\rangle} = V(A)_{\langle C,S\rangle}$.

V est bien un univers ensembliste :

Theorem

Il existe un isomorphisme $P_s(V) \xrightarrow{\simeq} V$ *donné par :*
$E \mapsto \bigvee_{x \in E} s(x)$.

On voit ici qu'une notion externe d'appartenance ($\in$, donnée par la logique interne de C) et une notion interne d'appartenance (induite par s) se combinent.

On retrouve le même phénomène à propos des modèles de zfc.

Par exemple, zfc + “zfc est inconsistante” a un modèle M^*.
Du point de vue de l’univers V, il y a des modèles de zfc, ne serait-ce que M^*, mais du point de vue de M^*, il n’existe aucun modèle de zfc.

Modèles internes.

Voir un topos comme un univers ensembliste rend assez naturel de rechercher des modèles de zfc dans un topos.

Motivation explicites de la théorie algébrique des ensembles = rendre possible de construire des modèles de zf à l'intérieur d'un topos comme il est possible de construire des modèles de zf à l'intérieur de l'univers ensembliste, par itération transfinie de l'opération « ensemble des parties ».

Cette itération n'est pas toujours disponible dans un topos, ce qui est lié au fait que la quantification, dans le langage interne d'un topos, est bornée.

L'idée de Joyal et Moerdijk est de se donner les moyens d'interpréter zfc dans une catégorie suffisamment proche d'un univers ensembliste.

- Dans le cas d'un univers ensembliste V, on a des modèles M de zf qui sont des objets de V.
- Dans le cas d'une catégorie C munie d'une classe de flèches vérifiant certaines propriétés supplémentaires, on a des modèles V de zf (un modèle pour chaque couple (L, s)).

Theorem

Soit $\langle C, S \rangle$ un prétopos de Heyting C muni d'une collection S de petites flèches vérifiant les deux axiomes supplémentaires suivants :

1. *Pour tout morphisme f de C, si f est dans S, alors $P_s(f)$ aussi. (La définition de $P_s(X)$ induit un foncteur $P_s : C \to \widehat{C}$.)*
2. *Le morphisme canonique $\mathcal{N} \to 1$ de C est dans S.*

Alors : $V_{\langle C, S \rangle}$ est un modèle de zf*.*

Exemples :

- C = Ens ; petites flèches = applications dont les fibres sont toutes de cardinal $< \kappa$.
- C = prétopos ; un objet de choix est un objet A de C pour lequel l'axiome du choix vaut dans la logique interne de C :
  $\forall a \in A\ \exists x \in X\ \phi(a, x)$ implique qu'il existe γ tel que
  $\forall a \in A\ \phi(a, \gamma(a))$.
  Un morphisme $f : B \to A$ de C est une petite flèche si c'est un objet de choix dans C/A.

Unification de nombreux cas de modèles de zf comme étant tous de la forme $V_{\langle C,S \rangle}$ pour un certain couple $\langle C, S \rangle$.

Transposition de l'existence de modèles internes au cas d'une catégorie de classes ?

Le concept de fibration

Sens géométrique des petites flèches. Une petite flèche $f : Y \to X$ peut être conçue comme une famille continue X-indexée de petits ensembles.

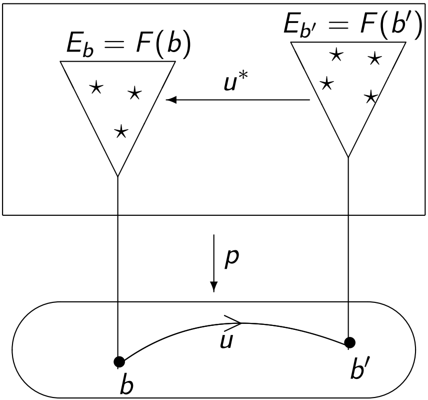
Fibration = généralisation catégorique de la notion de surjection.

Une *catégorie indexée* est un foncteur

- qui à tout objet b d'une « catégorie-base » B associe une certaine catégorie $F(b)$
- qui à tout morphisme $u : b \to b'$ dans la base B associe un foncteur en sens opposé $u^* = F(u) : F(b') \to F(b)$ (« foncteur de réindexation »).

Catégorie indexée = famille $(F(b))_{b \in B}$ de catégories organisée fonctoriellement.

Toute catégorie indexée F donne lieu à un foncteur $p : E \to B$, où $E =$ union disjointe de toutes les catégories $F(b)$ ($b \in B$).
Le foncteur p envoie chaque objet de $F(b)$ sur b et s'appelle une *fibration*.
Une catégorie indexée et la fibration qui lui est associée sont donc deux foncteurs qui décrivent la même situation, le premier par le bas, le second par le haut.



E = espace total

p = fibration

B = catégorie-base

Catégorie indexée ou fibration = généralisation de la notion de surjection (fibre $F(b)$ = ensemble $p^{-1}(b)$ des pré-images de b).

Mais le facteur essentiel apporté par une fibration est le fait que la catégorie-base peut être munie d'une certaine *structure*.

Une certaine corrélation systématique doit alors exister entre les relations existant entre deux points donnés de la base et les relations existant entre les points situés dans les fibres correspondantes – corrélation qui consiste en l'association de $\widehat{u}$ à tout morphisme u de la catégorie-base.

Fibration = foncteur surjectif pour lequel le changement de base est harmonieux.

Quel rapport précis avec la théorie algébrique des ensembles ?

$C^{\rightarrow}$:= catégorie des morphismes de C.
Le foncteur *codomaine* est le foncteur cod : $C^{\rightarrow} \rightarrow C$ qui à tout morphisme $\alpha : S' \rightarrow S$ de C associe le but S de α.
Ce foncteur est une fibration, la « fibration du codomaine ».

Dans le cas de la fibration du codomaine, la fibre au-dessus de $S \in \mathrm{Ob}\ C$ est la catégorie C/S formée par tous les morphismes de C qui aboutissent à S.

Tout morphisme $\alpha : S' \to S$ dans C donne lieu par pullback à un foncteur $\alpha^* : C/S \to C/S'$.

Le diagramme

$$\begin{tikzcd} T \times S' \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "\alpha^*(f)"'] & T \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "\alpha"'] & S \end{tikzcd}$$

devient :

$$\alpha^*(f) \in C/S' \dashleftarrow\!\shortmid f \in C/S$$

$$S' \xrightarrow[\alpha]{} S$$

LIEN AVEC LA TAE : *La collection* S *des petites flèches toutes les flèches de* C *est pensée comme une sous-fibration* $S \to C$ *de la fibration du codomaine cod* : $C^{\to} \to C$.

Théorie de la DESCENTE.

Exemple. $(X_i)_{i\in I}$ = recouvrement d'un espace topologique X, $Y := \coprod_{i\in I} X_i$, $p : Y \to X$ = projection canonique.
Supposons qu'on ait un fibré V_i sur chaque X_i et que, pour tous $i, j \in I$, V_i et V_j sont isomorphes sur $X_i \cup X_j =: X_{ij}$ selon un isomorphisme noté f_{ij}. On suppose en outre que $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$ pour tous $i, j, k \in I$.
Alors on peut construire un fibré vectoriel sur X en recollant les V_i.

Théorie de la descente = théorie du recollement relativement à un espace X pris comme base d'une fibration.

Redescription

Soit $X = U_1 \cup U_2$ un recouvrement d'un espace X. On note $V = U_1 \coprod U_2$ et $\alpha : V \to X$ la surjection canonique.

$$\begin{tikzcd} V \times_X V \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & V \arrow[d, "\alpha"] \\ V \arrow[r, "\alpha"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} p_1^*(\xi') \arrow[d, "="'] \arrow[dr] & \\ p_2^*(\xi') \arrow[r] & \xi' \end{tikzcd}$$

$$V \times_X V \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} V \xrightarrow{\alpha} X \quad \text{exact.}$$

Soit ξ' un objet au-dessus de V (par ex. un fibré vectoriel sur V).
$p_1^*(\xi') = p_2^*(\xi')$ ssi la "partie" de ξ' au-dessus de U_1 et la "partie" de ξ' au-dessus de U_2 coïncident sur $U_1 \cap U_2$.
Un objet au-dessus de X, c'est un objet ξ' au-dessus de V tel que $p_1^*(\xi') \simeq p_2^*(\xi')$.

On dit que α est un morphisme de recollement ou de *descente*.

Généralisation par Grothendieck (1959).

Soit F une catégorie indexée de base C et soit $\alpha : S' \to S$ un morphisme de C.

Pour $\xi' \in F(S')$, une *donnée de descente sur* ξ' *relativement à* α est un isomorphisme $p_1^*(\xi') \simeq p_2^*(\xi')$:

$$\begin{tikzcd} S' \times_S S' \arrow[r, dashed, "p_2"] \arrow[d, dashed, "p_1"'] & S' \arrow[d, "\alpha"] \\ S' \arrow[r, "\alpha"'] & S \end{tikzcd} .$$

On remplace la catégorie $F(S')$ par la catégorie Des_α qui a pour objets les objets de $F(S')$ munis d'une donnée de descente.

Le morphisme $\alpha : S' \to S$ est un *morphisme de F-descente* si un objet au-dessus de S est la même chose qu'un objet au-dessus de S' muni d'une donnée de descente, autrement dit si $\alpha^* : F(S) \to \mathrm{Des}_\alpha$ est un foncteur pleinement fidèle.

Un morphisme $\alpha : S' \to S$ est appelé un *morphisme de descente* si c'est un morphisme de F-descente pour la catégorie fibrée

$F = \ C^{\to} \xrightarrow{\text{cod}} C$.

Proposition (Grothendieck 1959, Proposition 2.1)

Si C possède des produits finis et des produits fibrés, alors il y a identité dans C entre morphismes de descente et épimorphismes stricts universels.

Tout épimorphisme d'une prétopos de Heyting C est donc un morphisme de descente. L'axiome 3 dit « de descente » de Joyal et Moerdijk a un rapport avec ce résultat, même si ce résultat ne mentionne pas la collection S de morphismes de C qu'il s'agit d'axiomatiser.

Proposition (Joyal et Moerdijk, Axiome 3)

Tout épimorphisme de C est un morphisme de p-descente pour la sous-fibration $p : S \to C$ de la fibration cod : $C^{\to} \to C$.

Proposition

Une sous-catégorie S de $C^{\to}$ est un système de petites flèches ssi la fibration cod $\restriction S : S \to C$ vérifie la propriété de Grothendieck.

Recompréhension des trois premiers axiomes de Joyal et Moerdijk :

Le 1$^{\text{er}}$ axiome dit que tous les isomorphismes de C sont dans S. Cela implique en particulier que, pour tout objet A de C, l'identité sur A, qui est un isomorphisme, fait partie de S, et par conséquent qu'il y a au moins un objet dans S au-dessus de chaque objet de C. Cela a donc un sens d'envisager S comme catégorie « au-dessus » de C.

Le 2$^{\text{e}}$ axiome dit alors que n'importe quel pullback d'un morphisme qui est dans S est lui-même dans S, ce qui techniquement garantit que la restriction de la fibration cod : $C^{\to} \to C$ à S est elle-même une fibration, autrement dit que $S \to C$ est une *sous-fibration* de $C^{\to} \to C$.

Le 3$^{\text{e}}$ axiome dit alors que, pour cette sous-fibration $p : S \to C$, le résultat de Grothendieck reste vrai.
Du coup, les trois premiers axiomes s'enchaînent pour définir une catégorie de classes (C, S) essentiellement comme une catégorie dans laquelle la théorie de la descente s'applique.

Soit S une collection de petites flèches sur une catégorie C.
S_A = flèches de S qui ont A pour but.

S_A = famille couvrante

$\mathcal{T}_S$ = topologie de Grothendieck engendré par $(S_A)_{A \in \text{ Ob } C}$

Descente relative à la fibration cod : $S \to C$ = descente relative à $\mathcal{T}_S$.

« Localement » (cf. formulation de l'axiome de représentabilité) :
= une propriété est locale si, lorsqu'elle est vraie d'une famille couvrante de A, alors elle est vraie de A.

D'un point de vue ensembliste, une application est un ensemble : *il n'y a pas de flèche*.
Les seules flèches correspondent aux arêtes du graphe d'appartenance propre à l'univers ensembliste d'arrière-plan.

Point de vue de la TAE : mise en vedette des flèches, avec la fibration du codomaine comme référence.

Le concept de fibration permet de ressaisir la théorie des ensembles tout en prenant les applications en tant que flèches comme entités fondamentales.
Greffe d'une idée anti-ensembliste à la théorie des ensembles, mais au nom de la théorie des ensembles.

Opération de croisement, et non de concurrence, avec la théorie zfc.

Applications du concept de fibration en logique

Fibration pour la théorie des types

Une déduction logique est toujours, au moins implicitement, relative à un certain « contexte de types ». Ainsi, déduire des deux prémisses $x = 3$ et $x + y = 5$ que $y = 2$, c'est en fait poser la dérivation $x : N, y : N \| \ x =_N 3, x + y =_N 5 \vdash y =_N 2$ dans le contexte de types $\Gamma = (x : N, y : N)$.
Un contexte de types n'est rien d'autre qu'une suite de variables déclarées chacune d'un certain type.

Une théorie des types est un système consistant en un ensemble de règles de formation de types et de termes, en un ensemble de règles de typage des termes et en un ensemble de règles de dérivation de termes.

Les règles de typage indiquent en particulier comment, dans un certain contexte Γ, une proposition bien formée φ peut être produite, ce qu'on note : $\Gamma \vdash \varphi : \text{Prop}$. Par exemple, si P est un prédicat qui s'applique à des objets de type τ, alors
$x : \tau \vdash P(x) : \text{Prop}$.

Les règles de dérivation sont celles du « calcul des séquents ». Un séquent est une expression de la forme $\Gamma \parallel \Theta \vdash \varphi$, qui signifie que, dans le contexte Γ, φ est une proposition bien formée, Θ un ensemble de propositions bien formées et que φ s'ensuit logiquement de Θ.

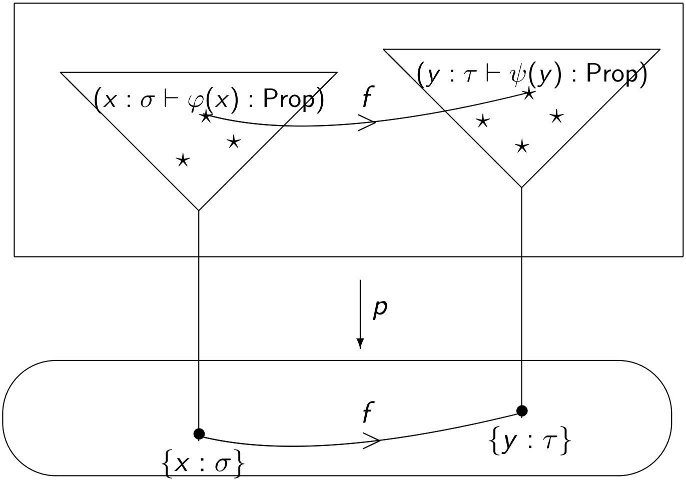
Les règles de dérivation indiquent comment un séquent d'une certaine forme peut être dérivé d'un autre séquent ou (selon les cas de figure) de deux autres séquents supposé(s) déjà dérivé(s).

Toute théorie des types peut se formuler au moyen d'une fibration dite *syntaxique*.
La catégorie-base de cette fibration

- a pour objets tous les contextes de types $\Gamma = (x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n)$;
- a pour morphismes $f : \Gamma \to \Delta$ entre $\Gamma = (x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n)$ et $\Delta = (y_1 : \theta_1, \ldots, y_m : \theta_m)$ toutes les suites de termes $f = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ telles que l'attribution de type $f_j(x_1, \ldots, x_n) : \theta_j$ dans le contexte Γ découle des règles de typage, pour tout j $(1 \leq j \leq m)$.

En ce qui concerne les fibres :

- La catégorie-fibre au-dessus d'un contexte Γ a pour objets tous les termes φ qui sont des propositions bien formées dans le contexte Γ.
- Un morphisme d'un objet $\Gamma \vdash \varphi : \mathrm{Prop}$ situé au-dessus de Γ vers un objet $\Delta \vdash \psi : \mathrm{Prop}$ situé au-dessus de Δ est un morphisme $f : \Gamma \to \Delta$ dans la catégorie-base tel que le séquent $\Gamma \parallel \varphi \vdash \psi[f_j/y_j]$ est dérivable, pour tout j $(1 \leq j \leq m)$.



Conditions portant sur f :

- $x : \sigma \vdash f(x) : \tau$
- $x : \sigma \parallel \varphi(x) \vdash \psi[f(x)/y]$

Fibration syntaxique :

- chaque point Γ de la base représente un groupe de prémisses au sein d'une déduction logique et constitue l'index d'un ensemble de propositions, qui forment la fibre au-dessus de Γ ;
- les morphismes entre fibres indiquent les dérivations logiques possibles de propositions, à savoir tous les séquents dérivables dans le contexte Γ.

Une fibration syntaxique indique une variation de contextes, conçue comme une opération de réindexation.

Fibration de Lawvere

Cf. Objets/Attributs dans l'exposé de Timothy Porter.

Possibilité de décrire les quantificateurs de la logique du premier ordre dans les termes d'une double adjonction liant des foncteurs définis entre catégories-fibres.
Soit en effet Pred la catégorie :

- dont les objets sont les couples (E, P), où E est un ensemble et P une partie de E ($P =$ « prédicat » sur E)
- dont les morphismes $(E, P) \to (F, Q)$ sont les applications $f : E \to F$ telles que, pour tout $x \in E$, $x \in P$ implique $f(x) \in Q$.

La projection $(E, P) \mapsto E$ définit alors une fibration $p : \text{Pred} \to \text{Ens}$.

Pour tout ensemble E, Pred_E est la catégorie des sous-ensembles de E : Pred_E correspond simplement à la logique booléenne sur E. Pour tout morphisme $f : E \to F$ de Ens, $f^* : \text{Pred}_F \to \text{Pred}_E$ est défini par : $f^*(Q) = \{x \in E : f(x) \in Q\}$.

En particulier, pour la projection $\pi_{E,F} : E \times F \to E$, on obtient $\pi^*_{E,F} : \text{Pred}_E \to \text{Pred}_{E\times F},\ P \mapsto \{(x,y) \in E \times F : x \in P\}$.

Relativement à $E \times F$, les quantificateurs existentiel et universel peuvent être définis par :
$\exists(X) = \{x \in E : (x,y) \in X \text{ pour un certain } y \in F\}$
$\forall(X) = \{x \in E : (x,y) \in X \text{ pour tout } y \in F\}$

Les foncteurs $\exists$ et $\forall$: $\text{Pred}_{E\times F} \to \text{Pred}_E$ sont l'adjoint à droite et l'adjoint à gauche du foncteur $\pi^*_{E,F}$.

Fibration de Tarski

La sémantique tarskienne a pour principal support les assignations de valeurs aux variables d'un certain langage formel L.
On peut la restituer au moyen d'une fibration.

La catégorie-base de cette fibration :

- a pour objets toutes les structures d'interprétation de L ;
- contient un morphisme $\bar{f} : N \to M$ à chaque fois qu'il existe un homomorphisme f de M vers N.

La fibre au-dessus de n'importe quel objet M de S est l'ensemble A_M de toutes les assignations de valeurs dans $|M|$.

Tout morphisme $\bar{f} : N \to M$ dans S donne lieu au foncteur $\bar{f}^* : A_M \to A_N$ correspondant à la composition par f.

La base d'une fibration est en général pourvue d'une certaine structure, et fonctionne ainsi comme un espace de contrôle, du fait de la corrélation existant entre les morphismes dans la base et les morphismes entre fibres correspondantes.

Fibration de Tarski : faiblement structurée.

Autre façon de le dire : il n'existe que très peu de contraintes sur les sections de la fibration de Tarski.

Dans la sémantique de Tarski, une assignation dans une structure d'interprétation *fixée* M attribue comme valeur un certain élément de $|M|$ à *chaque* variable du langage.

Si on considère une série d'assignations, les valeurs successives qu'une certaine variable 'x' reçoit dans les différentes structures d'interprétation peuvent être conçues comme les différents avatars d'une certaine valeur initiale de x.

Par exemple, si 'x' reçoit la valeur a dans $|M|$, a' dans $|M'|$, a'' dans $|M''|$, etc., la suite $(a, a', a'', \ldots)$ peut être vue comme ce qu'il advient de a lorsqu'on passe du contexte M au contexte M', puis au contexte M'', et ainsi de suite.

Mais rien ne relie les valeurs a, a', a'', $\ldots$ entre elles, car le choix des valeurs de x est à chaque fois entièrement libre.

Notion de « section » d'une fibration $p : E \to B$: c'est une coupe de p, c'est-à-dire le choix d'un certain objet au-dessus de chaque objet de B.

En étant définie comme un foncteur, une section $s : B \to E$ est astreinte à ne faire passer d'un certain objet $x = s(b)$ au-dessus de $b \in B$ à un autre objet $y = s(b')$ au-dessus de $b' \in B$ que selon un certain morphisme $x \to y$ dans E.
Les sections admissibles d'une certaine fibration sont contraintes par la structure interne de cette fibration.
Exemple : dans une fibration syntaxique, les morphismes entre contextes sont contraints par les règles logiques du calcul des séquents.

Section de la fibration de Tarski = *assignation généralisée*.
Enrichissements possibles de la fibration de Tarski, par ajout de contraintes soit en chaque fibre (c'est la voie suivie par la logique dynamique), soit pour le parcours de la base (par exemple si on demande que toute section se fasse le long d'une chaîne élémentaire).

Fibration en logique modale

Idée fondamentale : pas de totalité de tous les mondes possibles, existence de mondes possibles de différents niveaux – un monde possible de niveau supérieur étant toujours relatif à un monde possible de niveau immédiatement inférieur.
Chaque monde possible devient ainsi un index pour un certain système de possibilité, représenté par l'ensemble des mondes qui sont relatifs à ce monde.

Idée de base : représenter les 0-mondes possibles par les points d'une variété différentielle M, et les 1-mondes possibles relatifs à un 0-monde x par un sous-espace de T_xM. Et ainsi de suite (en passant de TM à TTM comme on est passé de M à TM).

Conclusion

- **Philosophie des mathématiques** : elle doit entrer dans le jeu de certains concepts mathématiques, pour contribuer à dégager la généralité transversale, intra- et extra-mathématique de ces concepts.
- **Fondements des mathématiques** : ils consistent en l'assise que confèrent aux mathématiques leur empreinte dans le domaine théorique et discursif en général.
  Cette diffraction des mathématiques n'est pas quelque chose de simple. En particulier, les concepts fondamentaux ne sont pas les plus simples ou « primitifs ». Par exemple, le concept d'ensemble déjoue le sens intuitif qu'on attache au mot "ensemble". Il a justement fallu la théorie des modèles et la sémantique logique héritée de Tarski pour réaliser l'ancrage du concept d'ensemble.

Il ne s'agit pas non plus de plonger les mathématiques dans l'élément du langage ordinaire. Au contraire, c'est respecter le sens irréductiblement mathématique des concepts mathématiques pour les utiliser au-delà des mathématiques.
C'est par exemple employer le concept de fibration pour approfondir et généraliser la notion de contexte.

Il ne s'agit pas non plus d'une simple modélisation.

En un sens, ces deux points se rejoignent : la philosophie des mathématiques peut être pensée aujourd'hui comme une façon renouvelée de penser les fondements des mathématiques.