Une application de la géométrie différentielle à la logique modale

Brice Halimi

Université Paris Ouest

Sujet de cet exposé : l'itération modale.
Projet de cet exposé : présenter une « logique modale géométrique » comme cadre d'interprétation de l'itération modale.

Itération modale = superposition de qualifications modales, comme lorsqu'une proposition est dite nécessairement nécessairement vraie, ou bien encore nécessairement possiblement nécessairement vraie.

Deux buts :

- proposer une nouvelle interprétation des modalités itérées qui s'écarte de la sémantique de Kripke usuelle tout en la généralisant ;
- construire une sémantique en termes de mondes possibles pour la logique modale propositionnelle en appliquant certains outils de la géométrie différentielle et riemannienne.

Conception leibnizienne des modalités :

- les modalités (nécessité, possibilité, contingence) sont des traits propositionnels absolus ;
- toute modalité itérée est vide de sens ;
- les mondes possibles forment une totalité métaphysique donnée originellement et close.

L'itération modale est également compromise lorsqu'elle est conçue comme validité logique.
Tractatus logico-philosophicus, 5.525 :

> *La certitude, la possibilité ou l'impossibilité d'un certain état de choses ne sont pas exprimées par une proposition mais par le fait qu'une expression est une tautologie, une proposition douée de sens ou une contradiction.*

Il n'existe qu'un unique espace logique, qu'on ne peut re-situer à l'intérieur d'un espace plus vaste.
Cf. également la définition tarskienne de la validité logique comme prédicat métalinguistique (et donc non itérable).

Leibniz, Wittgenstein, Tarski : l'itération modale peut être rejetée pour des motifs parfaitement légitimes.

Mais si elle est considérée comme douée de signification, alors son interprétation devrait être à la hauteur de cette signification.

La considération de différents niveaux de possibilité devient alors cruciale.

En effet, dire par exemple qu'une vérité est « nécessairement nécessaire » revient à dire qu'elle est nécessaire *quel que puisse être l'ensemble des possibles*.

De même, qualifier une vérité de « possiblement possible », c'est dire qu'elle n'est peut-être pas possible étant donné l'ensemble actuel des possibles, mais qu'elle deviendrait possible pour peu que l'ensemble actuel des possibles soit remplacé par un autre ensemble possible de possibles.

Dire d'un état de choses qu'il *aurait pu* être possible, c'est donc implicitement transiter d'un certain système de possibilité vers un nouveau contexte dans lequel ce système est relativisé comme n'étant qu'un parmi d'autres, et c'est dire que, relativement à quelque système de possibilité alternatif, l'état de choses considéré devient possible.

Les modalités concernent les vérités abordées autrement que factuellement.

Pourtant, l'étendue du possible (la collection de tous les mondes possibles) semble constituer une sorte de *super-fait*.

La logique modale doit aller au-delà de ce super-fait, et considérer que l'ensemble actuel des mondes possibles ne constitue qu'un ensemble parmi d'autres possibles.

D'où l'idée d'ensembles possibles de possibles, autrement dit de possibles de second ordre, et plus généralement de possibles d'ordre supérieur.

En termes de mondes possibles :

- vérité = satisfaction dans le monde actuel
- vérité nécessaire = satisfaction, non seulement dans le monde actuel, mais dans tout monde possible $w \in W$
  Passage de w_0 à W = *changement d'échelle*.
- vérité nécessairement nécessaire = ?
  Réponse : une telle vérité devrait correspondre à un changement d'échelle analogue, fondé sur un ensemble W^2 d'ensembles de mondes possibles, qui serait à W ce que W est à w_0.
- Et ainsi de suite (en cas d'itération modale supplémentaire).

Conclusion : Toute itération modale (à commencer par toute clause modale simple) devrait être interprétée par un changement d'échelle faisant passer d'un monde possible à un ensemble de mondes, puis à un ensemble d'ensembles de mondes, etc.

Prendre au sérieux l'itération modale, c'est ainsi introduire des systèmes de possibilité emboîtés, chaque système de possibilité correspondant à un ensemble de possibles d'un certain niveau.

Sémantique recherchée : fondée sur un emboîtement ouvert de systèmes de possibilité d'ordre supérieur.

Syntaxe de la logique modale propositionnelle :

- toute variable propositionnelle est une formule ;
- si ϕ et ψ sont deux formules, alors $\neg\phi$, $(\phi \wedge \psi)$ et $(\phi \vee \psi)$ également ;
- si ϕ est une formule, alors $\Diamond\phi$ et $\Box\phi$ également.

($\Diamond$ et $\Box$ sont interdéfinissables en tant qu'opérateurs duaux.)

Degré modal d'une formule.

Un système de logique modale est dit *normal* s'il inclut comme axiomes :

- toutes les tautologies de la logique propositionnelle non modale
- l'axiome **K** : $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$
- l'axiome **T** : $\Box p \to p$

Règles d'inférence : le *modus ponens*, la « règle de nécessitation » (si ϕ est un théorème, il en est de même de $\Box\phi$) et la règle de substitution uniforme (si une formule $\chi(p)$ contenant p est un théorème, alors il en est de même de $\chi[\phi/p]$, pour n'importe quelle formule ϕ).

Le système ainsi défini est appelé T.
L'addition à T de l'axiome **4**, $\Box p \to \Box\Box p$, définit le système S4 = T + **4**.

Sémantique relationnelle de Kripke pour la logique modale propositionnelle (1963).

Un *cadre de Kripke* est un triplet $\mathcal{F} = \langle W, R, w_0 \rangle$ (R = relation d'« accessibilité » définie sur W).
Un *modèle de Kripke* est un quadruplet $\mathcal{M} = \langle W, R, w_0, V \rangle$ issu d'un cadre par ajout d'une valuation sur les variables propositionnelles.
Satisfaction des formules :

- $\mathcal{M}, w \vDash p$ ssi $w \in V(p)$
- $\mathcal{M}, w \vDash \neg\phi$ ssi $\mathcal{M}, w \nvDash \phi$
- $\mathcal{M}, w \vDash \phi \wedge \psi$ ssi $\mathcal{M}, w \vDash \phi$ et $\mathcal{M}, w \vDash \psi$
- $\mathcal{M}, w \vDash \Diamond\phi$ ssi il existe $w' \in W$ tel que wRw' et $\mathcal{M}, w' \vDash \phi$
- $\mathcal{M}, w \vDash \Box\phi$ ssi, pour tout $w' \in W$, wRw' implique $\mathcal{M}, w' \vDash \phi$.

La sémantique de Kripke interprète toue itération modale par une ramification :

$$\mathcal{M}, w \models \Box\Box p \text{ ssi } \forall v : wRv, \forall u : vRu, \mathcal{M}, u \models p.$$

L'exploration progressive du graphe de R assure l'interprétation des modalités itérées : plus le degré modal d'une formule est grand, et plus longues sont les branches du graphe à considérer.

Sémantique de Kripke = moyen optimal pour interpréter l'itération modale avec un seul et même ensemble de mondes possibles W explicitement donné dès le départ.

Pourtant, il n'existe aucune raison de supposer, comme le fait Kripke, une quelconque *totalité* de mondes possibles.

Il est vrai qu'à différents cadres de Kripke vont correspondre, en général, différents ensembles de mondes possibles. Néanmoins, pour tout cadre donné, l'ensemble des mondes possibles est fixé.

Pour le dire autrement, la validité est un prédicat métalinguistique, et non une nécessité de second ordre.
(Une formule est dite *valide dans un cadre* si elle est vraie dans tous les modèles issus de ce cadre, et *valide* (tout court) si elle est valide dans tout cadre.)

Il est également vrai que toute relation d'accessibilité R induit un emboîtement w_0, $E_{w_0} = \{w : w_0 R w\}$, $(E_w)_{w \in E_{w_0}}$, ..., de systèmes de possibilité.
En cela, la sémantique de Kripke réussit bien à fournir une interprétation essentiellement adéquate de l'itération modale.

Toutefois :

- l'ensemble de tous les mondes possibles est explicitement donné dès le début.
- Un monde possible n'est pas intrinsèquement relatif à un système de possibilité : le même monde w peut être relatif à des mondes différents, et selon des chaînes de longueurs différentes.
- Deux systèmes E_w et $E_{w'}$ n'ont en général rien à voir entre eux : il existe des relations entre les mondes, mais pas entre les ensembles de mondes.

Conclusion : Kripke fait place aux modalités itérées (contrairement à Leibniz), mais reste encore un peu trop héritier de la conception leibnizienne des mondes possibles.

Dans ce qui suit, il ne s'agira pas de critiquer la sémantique de Kripke, mais plutôt de la radicaliser et, en un certain sens qu'on précisera, de la généraliser.

Par ailleurs, le choix d'un système axiomatique particulier ne sera jamais discuté : tout se situera au niveau sémantique, et non syntaxique.

Pour résumer : l'itération modale suggère que la collection des mondes possibles est elle-même contrefactualisable – en ce sens que la donnée des mondes actuellement possibles aurait pu être autre. $\Diamond\Diamond\phi = \phi$ *aurait pu* être possible $= \phi$ serait possible, si nous avait échu un système de possibilité différent de celui dans lequel nous nous trouvons.

L'intuition de systèmes emboîtés de mondes possibles est au coeur de l'itération modale (dès lors qu'on lui accorde un sens).

C'est cette intuition que la géométrie différentielle et riemannienne va nous aider à modéliser, dans le cadre d'une autre sémantique que celle de Kripke.

Option ensembliste adaptée de la sémantique de Kripke (pour $R = W \times W$) :
$P^0(X) = X$, $P^{n+1}(X) = P(P^n(X))$.
On définit alors : $M, X \models \Box\phi$ ssi, pour tout $x \in X$, $M, x \models \phi$.

Le problème est qu'il faudrait dire comment évaluer les formules atomiques en n'importe quel élément de n'importe quel ensemble $P^n(X)$.

Une option envisageable serait :
p est vraie en $Y \in P^{n+1}(W)$ ssi p est vrai en un certain $X \in Y$.

Cependant, cette dernière clause ressemble à ce que devraient être les conditions de vérité en $P^{n+1}(W)$ de $\Diamond p$, et non celles de p, ce qui trivilaise l'interprétation des modalités.

Problème général de « relever » l'interprétation d'une variable propositionnelle.

Difficulté de trouver un modèle ensembliste d'ensembles emboîtés de mondes possibles – chaque monde possible étant un élément d'un ensemble qui à son tour peut être vu lui-même comme un « monde » de niveau supérieur.

Idée : renverser cette représentation des choses, en pensant plutôt tout monde possible comme un *ensemble* (et non un élément) de mondes de niveau supérieur.

Un monde devient ainsi une multiplicité de mondes pour autant que l'analyse d'une certaine structure en ce monde dévoile une telle multiplicité.
Modèle de tous les développements de Taylor possibles en un certain point.

Nouvelle représentation des choses :

- des mondes possibles de niveau supérieur sont des spécifications de mondes possibles de plus bas niveau ;
- chaque monde possible d'un certain niveau correspond à l'ensemble de toutes ses spécifications possibles au niveau supérieur.

Analyse, et non synthèse :

- Il est plus aisé d'analyser la structure de l'ensemble des mondes plutôt que de construire des ensembles d'ensembles de mondes.
- Surtout, un simple ensemble de mondes possibles ne constitue pas par lui-même un *monde* possible d'ordre supérieur, c'est-à-dire quelque chose qui serait organisé et unifié comme un monde.

Dans la nouvelle représentation des choses, un *système de possibilité d'ordre supérieur* n'est pas un *monde* (?) possible de mondes possibles, mais un monde possible vu comme l'*index* d'un espace de mondes possibles situés à un niveau supérieur.

Il ne s'agit pas de construire un nouveau monde de niveau supérieur à l'aide d'une multiplicité de mondes, mais d'attacher à chaque monde un espace de mondes de niveau supérieur.

Distinction niveau/ordre.
Étant donnés des mondes possibles de niveau $n = 0, 1, \ldots,$

- un monde d'ordre 1 est un monde de niveau k auquel sont attachés des mondes de niveau $k + 1$;
- un monde d'ordre 2 est un monde de niveau k auquel sont attachés des mondes de niveau $k + 1$ et d'ordre 1 ;
- et ainsi de suite.

Concept de *monde possible d'ordre supérieur*.

L'interpretation d'une formule de degré modal i fait intervenir des mondes de niveaux respectifs $0, 1, \ldots, i$ et d'ordres respectifs $i, i - 1, \ldots, 0$.

Composantes du cadre sémantique recherché :

- une collection ouverte de mondes possibles de niveaux croissants ;
- un espace de mondes possibles *relatif* à chaque monde possible déjà donné ;
- des mondes possibles de niveau supérieur comme spécifications de mondes possibles de niveau inférieur (mais d'ordre supérieur).

Candidat : le fibré tangent TM d'une variété différentiable M.

Pour $x \in M$, $T_x M$ (ou plutôt un certain sous-ensemble de $T_x M$) $=$ ensemble des mondes possibles relatifs à x.

Construction itérable ($TTM, \dots$), la dimension de TM étant à chaque fois le double de celle de M (changement d'échelle).

Projet : interpréter les modalités itérées au moyen d'un fibré géométrique.

Donc :

- mondes possibles de niveau 0 = points x d'une variété M de départ
- mondes possibles de niveau 1 *relatifs à* $x \in M$ = vecteurs de $T_x M$ (x étant alors considéré comme d'ordre 1)
- TM = ensemble de tous les mondes possibles de niveau 1 en général
- mondes accessibles = points reliés par un chemin
- interprétation d'une variable propositionnelle p = ensemble de courbes de M
- p est vraie en x ssi l'un de ces courbes passe par x
- interprétation d'une formule ϕ de degré modal k = ensemble de courbes de $T^k M$
- ϕ est vraie en x ssi l'un de ces courbes passe, non par x, mais par un certain $x^k \in T^k M$ relié à x.

TÂCHES :

1. Interpréter $\neg\phi$, $(\phi \wedge \psi)$ et $(\phi \vee \psi)$.
2. Definir le *relevé modal* des courbes de M interprétant p en des courbes de TM interprétant $\Box p$.
3. Définir le *relevé non modal*. Exemple de $(\Box p \wedge q)$: les courbes interprétant q doivent pouvoir être relevées à TM pour devenir homogènes aux courbes interprétant $\Box p$, et pourtant $\Box q$ n'apparaît pas.
4. Associer, à chaque $x \in M$, une suite $x^0 = x, x^1 \in TM, \ldots, x^i \in T^i M, \ldots$ de contreparties de x.
5. Déterminer les axiomes validés.

Un *cadre modal géométrique* est une suite $(p_{i+1} : M_{i+1} \to M_i)_{i \geq 0}$ de fibrés, permettant de définir :

- le relevé modal $\lambda(\gamma)$ à M_{i+1} de n'importe quelle courbe γ de M_i ;
- le relevé non modal $L(\gamma)$ à M_{i+1} de n'importe quelle courbe γ de M_i ;
- une suite $(x, x^1 \in M_1, x^2 \in M_2, \ldots)$ au-dessus de chaque $x \in M$, telle que $p_{i+1}(x^{i+1}) = x^i$ pour tout $i \geq 0$.

Une *valuation* sur un tel cadre est l'assignation, à tout variable propositionnelle p, d'une famille $V(p)$ de courbes de M.

Un cadre muni d'une valuation est un *modèle modal géometrique*.

La construction d'un cadre modal géométrique demande un surcroît de structure.

Projet : trouver ce surcroît de structure dans une métrique riemannienne.

- *métrique* g
- *connexion de Levi-Civita*, ∇, qui associe, à deux champs de vecteurs X et Y définis dans le voisinage de $x_0 \in M$, la déviation infinitesimale $\nabla(X, Y)(x_0)$ de Y par rapport à $X(x_0)$.
- champ de vecteurs X *parallèle* : $\nabla(X, X) = 0$
- Si X est parallèle, alors $X'(0) \in T_{X(0)}TM$ est dit *horizontal*.
- Une courbe $\gamma : \mathbb{R} \to TM$ on TM est dite *horizontal* si $\gamma'(t)$ est horizontal pour tout $t \in \mathbb{R}$.
  Exemple : si γ est une géodésique, alors γ est une courbe horizontale.

Fait : Pour toute courbe γ de M et tout vecteur $v \in T_{\gamma(0)}M$, il existe (localement) une unique courbe horizontale γ^v de TM relevant γ et passant par v.

La courbe γ^v s'appelle le « relevé horizontal de γ passant par v à $t = 0$ ».

Exemple : si γ est une géodésique de M, le relevé horizontal de γ passant par $\gamma'(0)$ n'est autre que γ', qui est elle-même une géodésique de TM (cf. suite).

Fait : Toute métrique g sur M induit une métrique naturelle g_T sur TM, appelée « métrique de Sasaki ».

Étant donnée une variété riemannienne $\langle M, g \rangle$, on pose :

- $M_0 = M$, $g_0 = g$
- $M_{n+1} = T(M_n)$, $g_{n+1} = (g_n)_T$
- $p_{n+1} : \langle M_{n+1}, g_{n+1} \rangle \to \langle M_n, g_n \rangle$.

Fait : la connexion ∇ permet de définir le *transport parallèle* $J^{\gamma}_{t,t'}(v)$, le long de γ, de n'importe quel vecteur $v \in T_{\gamma(t)}M$ en un vecteur de $T_{\gamma(t')}M$.

TÂCHE 4 : Définir une suite $(x, x^1, x^2, \ldots)$ au-dessus de $x \in M$.

Pour cela, on suppose $\langle M, g \rangle$ munie d'une famille
$\mathrm{Ac}(M) = \{\gamma_i : i \in I\}$ de *courbes d'accessibilité* sur M.

Mondes accessibles depuis x :

$$A^1(x) := \bigcup_{x \in \overline{\gamma_i}} \overline{\gamma_i}$$

(où $\overline{\gamma} := \{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$).

Codage des mondes accessibles depuis x en vecteurs de T_xM :

Pour $v \in T_xM$, c_v = géodésique définie par $c_v(0) = x$ et $c'_v(0) = v$.

$P^1(x) := \{v \in B_x : c_v(1) \in A^1(x)\}$ = représentant de $A^1(x)$ dans T_xM.

$\pi^1(x) := \{c'_v(t) : v \in P^1(x), t \in \mathbb{R}\}$ = ensemble des 1-*mondes relatifs à* x.

($(v, t) \mapsto c'_v(t)$ = « flot géodésique » de $\langle M, g\rangle$.)

La construction de π^1 est itérable :

$$\pi^2 : TM \to \{\text{courbes de } TTM\}, \pi^3, \ldots$$

Pour $\pi^2(x)$, il suffit de remplacer $\langle M, g\rangle$ par $\langle TM, g_T\rangle$, en posant :

$$\pi^2(x) := \bigcup_{w \in \pi^1(x)} \pi(w),$$

$\pi(w)$ – pour $w \in \pi^1(x)$ – étant défini sur le modèle de $\pi^1(x)$, les courbes d'accessibilité γ_i sur M étant remplacées par les courbes $J_w^{\gamma_i} : t \mapsto J_{t_w,t}^{\gamma_i}(w)$ de TM.

TÂCHES 2 & 3 : Définir le relevé modal et le relevé non modal de n'importe quelle courbe de M.

Pour cela, on suppose $\langle M, g \rangle$ munie, pour chaque $n \geq 0$, d'une sélection $\mathrm{Ad}_n(M)$ de *courbes admissibles* sur $T^n M$: l'interprétation de chaque formule de degré modal n doit être un sous-ensemble de $\mathrm{Ad}_n(M)$.
On demande :

- $\delta \in \mathrm{Ad}_{n+1}(M)$ implique $p_{n+1}(\delta) \in \mathrm{Ad}_n(M)$;
- pour $\gamma \in \mathrm{Ad}_n(M)$, il existe au moins une courbe $\delta \in \mathrm{Ad}_{n+1}(M)$ relevant γ (i.e., $p_{n+1}(\delta) = \gamma$).

Toute courbe γ de T^nM donne alors naissance à deux ensembles de courbes de $T^{n+1}M$:

$$\lambda(\gamma) = \{\tilde{\gamma}^v \in \mathrm{Ad}_{n+1}(M) : \exists t, k \in \mathbb{R} \text{ t.q. } v = k\gamma'(t)\}$$

$$L(\gamma) = \{\widehat{\gamma}\} \cap \mathrm{Ad}_{n+1}(M)$$

où $\widehat{\gamma}$ est la courbe de $T^{n+1}M$ définie par : $\widehat{\gamma}(t) = \vec{0}_{\gamma(t)}$.

Explication :

- Les courbes $\tilde{\gamma}^{\gamma'(t)}$ sont les relevés les plus naturels à $T^{n+1}M$ de toute courbe γ de T^nM.
- Le vecteur nul $\vec{0}_x \in T_xM$ est le représentant de x dans T_xM, il est donc naturel de transposer γ en $\widehat{\gamma}$ = section nulle de p_{n+1} le long de γ.

Comme l'écart en degré modal de deux sous-formules principales d'une même formule peut être plus grand que 1, on définit l'itération du relevé non modal : $L_n^n = \mathrm{id}$, $L_n^{n+m} = L_{n+m-1}^{n+m} \circ \ldots \circ L_n^{n+1}$.

Un *cadre modal métrique* $\underline{F}$ est un quadruplet $\langle M, g, \mathrm{Ac}(M), (\mathrm{Ad}_n(M))_{n\geq 0}\rangle$.

Une valuation V sur $\underline{F}$ est l'assignation, à toute variable propositionnelle p, d'un ensemble $V(p)$ de portions continues (définies à reparamétrisation près) de certains membres de $\mathrm{Ad}_0(M)$.

Cette dernière définition garantit que $\overline{V(p) \cap V(q)} = \overline{V(p)} \cap \overline{V(q)}$ et que $\overline{\mathrm{Ad}_0(M) \setminus V(p)} = \overline{\mathrm{Ad}_0(M)} \setminus \overline{V(p)}$.
(Pour tout ensemble de courbes Γ, $\overline{\Gamma} := \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{\gamma}$.)

Un *modèle modal métrique* est un cadre modal métrique muni d'une valuation.

Définition inductive de l'interprétation $V(\phi)$ de toute formule ϕ (TÂCHE 1) :

- $V(\neg\phi) = \mathrm{Ad}_n(M) \setminus V(\phi)$ (où $\deg(\phi) = n$)
- $V(\phi \wedge \psi) = V(\phi) \cap L^n_m(V(\psi))$ (où $\deg(\phi) = n$ et $\deg(\psi) = m < n$)
- $V(\phi \vee \psi) = V(\phi) \cup L^n_m(V(\psi))$ (sous les mêmes hypothèses)
- $V(\Diamond\phi) = \lambda(V(\phi))$.

Pour toute formule ϕ de degré modal n et pour tout $x \in M$:

$$\langle \underline{F}, V \rangle, x \vDash \phi \text{ ssi } \pi^n(x) \cap \overline{V(\phi)} \neq \emptyset.$$

Le cadre sémantique est désormais complet. Dans ce cadre, l'itération modale correspond à la progression le long de la tour de fibrés $\ldots \to TTM \to TM \to M$.

Remarque : si $y \in \pi^n(x) \cap \overline{V(\phi)}$, alors $\vec{0}_y \in \pi^{n+1}(x) \cap \overline{L(V(\phi))}$. Ainsi, si une formule est vraie en x, alors tous ses relevés non modaux seront vrais aux niveaux supérieurs. Le relèvement non modal correspond donc bien à l'idée de simple transfert.

TÂCHE 5

Les axiomes **T** et **K** sont valides.

L'axiome **4** n'est pas valide en général.
En effet, $\langle \underline{F}, V \rangle, x \vDash \Diamond p$ si $\lambda(V(p))$ passe par au moins un point de $\pi(x)$. Mais $\langle \underline{F}, V \rangle, x \vDash \Diamond\Diamond p$ simplement si $\lambda(\lambda(V(p)))$ passe par un point de $\pi(w)$ pour un élément w de $\pi(x)$ qui peut tout à fait être distinct de x.

Cependant, l'axiome **4** devient valide si on se restreint à une classe très particulière de cadres modaux métriques.

Un cadre modal métrique $\langle M, g, \mathrm{Ac}(M), (\mathrm{Ad}_n(M))_{n\geq 0}\rangle$ sera dit *minimal* ssi :

- $\langle M, g\rangle$ est une variété riemmannienne *simple* (= deux points quelconques de M sont reliés par au plus une géodésique),
- $\mathrm{Ac}(M)$ et $\mathrm{Ad}_0(M)$ sont composés uniquement de géodésiques,
- pour tout $n \geq 0$, $\mathrm{Ad}_{n+1}(M)$ coïncide avec l'ensemble de tous les relevés horizontaux des courbes de $\mathrm{Ad}_n(M)$,
- deux géodésiques quelconques de $\mathrm{Ac}(M)$ sont ou disjointes ou identiques à reparamétrisation près.

Proposition

L'axiome **4** *est valide dans tous les cadres modaux métriques minimaux.*

Soit S4* le système modal obtenu à partir de S4 en limitant la règle de substitution au cas où le *substituens* est de degré modal inférieur ou égal à celui du *substituendum*. En effet, l'assertion d'un schéma modal (tel que $\Diamond\Diamond\phi \rightarrow \Diamond\phi$), ne devrait pas *par là même* engager à l'assertion analogue pour les formules de degré modal strictement supérieur à celui de ϕ.

L'admission sans restriction de la règle de substitution repose au fond sur un postulat d'uniformité modale : la possibilité de possibilité est censée fonctionner comme la possibilité simple. Mais un tel postulat n'a rien d'évident. Il existe de bonnes raisons de penser que la signification de '$\Diamond$' dépend de la place où apparaît ce symbole dans une formule.

Proposition

Le système S4 est complet relativement à la classe de tous les cadres modaux métriques minimaux.*

Conclusion

- Une sémantique modale plus soucieuse de restituer la force de l'itération modale n'implique pas de renoncer à la sémantique des mondes possibles de Kripke, mais elle implique de renoncer plus clairement que Kripke à l'héritage leibnizien d'une totalité close et absolue de mondes possibles.
- Dire d'une certaine situation qu'elle aurait pu être possible, c'est dire que cette situation serait possible si le système de possibilité dans lequel on se trouve était remplacé par un autre système. La collection actuelle de tous les mondes possibles (la collection de tous les mondes actuellement possibles) est elle-même contrefactualisable.
  Une telle représentation aboutit à celle d'une collection ouverte de mondes possibles étagés selon des niveaux indéfiniment croissants, avec un changement d'échelle à chaque changement de niveau.
  Des raisons purement philosophiques motivent un concept de monde possible d'ordre supérieur.

- Le cadre géométrique qui a été proposé est la traduction technique de ce concept de monde possible d'ordre supérieur. La sémantique obtenue est nettement plus complexe que la sémantique de Kripke. Mais des considérations de simplicité technique ne sont pas un argument philosophique.
- Un résultat de complétude a pu être obtenu à propos d'une variante de S4.
- La sémantique fondée sur les cadres métriques est en réalité une généralisation de la sémantique de Kripke : la sémantique de Kripke correspond au cas où l'espace sous-jacent au réseau des relations d'accessibilité est discret.
- Deux traits géométriques sont solidaires : 1°) la métrique détermine les relations d'accessibilité et l'évaluation des formules de façon essentiellement locale ; 2°) les mondes possibles se répartissent sur des niveaux différents.
- Perspective d'une interaction entre logique et géométrie, suivant l'hypothèse d'une comparaison entre opérateurs modaux et opérateurs différentiels.

MERCI !